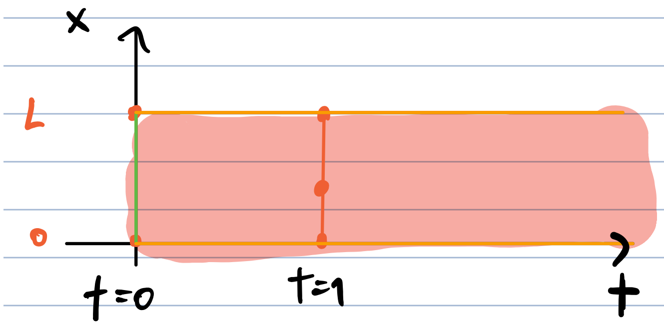
Edp's

• Ecuación del calor:



• $u(t,x)$ = temperatura del pto $x \in [0,L]$ en el tiempo $t \in [0,+\infty)$

• $u_0(x) = u(0,x)$ temperatura inicial de la barra.

• $u(t,0)$ y $u(t,L)$ condiciones de borde

Ejercicio 1: • La ecuación de calor es $\boxed{u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)}$

• Asumimos que $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u_0(x) = sen\left(\frac{\pi}{L}.x\right) \end{cases}$ } (En el práctico escribimos $u(x,t)$ en lugar de $u(t,x)$)

→ Buscamos soluc. por método de var. sep. → asumimos $u(x,t) = X(x)T(t)$.

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ u_t(x,t) = X(x)\,T'(t) \\ &\cdot\ u_{xx}(x,t) = X''(x).T(t) \end{aligned}\right\} \quad X(x).T'(t) = X''(x).T(t).$$

$$\frac{X(x)}{X''(x)} = \frac{T(t)}{T'(t)}$$

Entonces $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\dfrac{X(x)}{X''(x)} = k = \dfrac{T(t)}{T'(t)}$

Luego $\begin{cases} X(x) = k\,X''(x) & \longrightarrow \text{necesariamente (por *) solo tiene sentido } k<0. \\ T(t) = k\,T'(t). & \longrightarrow T(t) = cte.\,e^{1/k\,t} \end{cases}$

Recordamos $u(L,t) = 0 \longrightarrow X(L)T(t) = 0 \longrightarrow X(L) = 0$
$u(0,t) = 0 \longrightarrow X(0)T(t) = 0 \longrightarrow X(0) = 0$

Soluc

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-k}}.x\right) + C_2\, sen\left(\frac{1}{\sqrt{-k}}.x\right).$$

• $X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$

• $X(L) = 0 \Rightarrow C_2.sen\left(\frac{L}{\sqrt{-k}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{-k}} = n\pi \rightarrow \sqrt{-k} = \frac{L}{n\pi}$ | $k = -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2$

Pasando en limpio :

$$\begin{cases} X(x) = cte_1 \cdot Sen\left(\frac{n\pi}{L}.x\right) \\ T(t) = cte_2 . e^{-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 t} \end{cases}$$

Entonces $\boxed{u(x,t) = cte . e^{-\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 . t} . Sen\left(\frac{n\pi}{L}.x\right) .}$

Este es el formato de solución, para n entero, con el método de var. separables.

Este tipo de expresión condiciona el formato de expresión de la temp. inicial :

$$u(x,0) = cte . Sen\left(\frac{n\pi}{L}.x\right) .$$

La cond u_0 de la parte a) es $sen\left(\frac{\pi}{L}.x\right)$

Entonces el método de var. sep. sirve y

$$u(x,t) = \underbrace{e^{-\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 t}}_{T(t)} . \underbrace{Sen\left(\frac{\pi}{L}.x\right)}_{X(x)}$$

es solución al problema con las cond de borde de a).