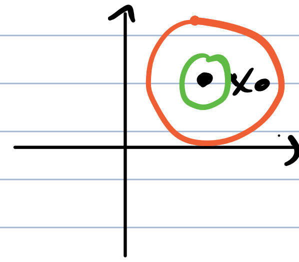
Pract 5, estabilidad.

• **Definiciones**: $\dot{x} = f(x)$, x_0 pto de equilibrio $\left(f(x_0) = 0 \right)$

• Decimos que x_0 es pto de eq. estable si:

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que, si $y(t)$ solución con $\underbrace{y(t_0) \in B(x_0,\delta)}_{\|y(t_0)-x_0\| < \delta} \Rightarrow \forall t > t_0$ $\underbrace{y(t) \in B(x_0,\varepsilon)}_{\|y(t)-x_0\| < \varepsilon}$

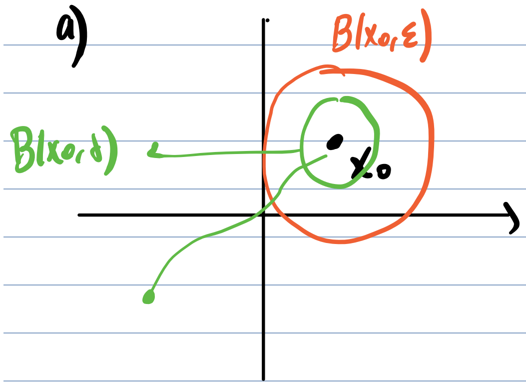


• Decimos que x_0 es pto asintóticamente estable si:

- x_0 es estable
- $\exists \delta'$ tq si $y(t)$ soluc con $y(t_0) \in B(x_0,\delta')$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = x_0$.

4) $\dot{x} = f(x)$ ec. autónoma en $\mathbb{R}^n$, x_0 pto de equilibrio.

a)



1. Supongamos que, si $y(t)$ soluc con $y(t_0) = y_0$, $\forall \delta > 0$ $\exists t_\delta$ tal que $d(y(t), x_0) < \delta$
2. Además asumimos que x_0 es estable

Veamos que estas dos cond. (1 y 2) implican que $y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} x_0$

Prueba: Quiero probar $y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} x_0$, es decir que dado $\varepsilon > 0$ busco un T tq $\forall t > T$, $d(y(t), x_0) < \varepsilon$. Fijamos $\varepsilon > 0$

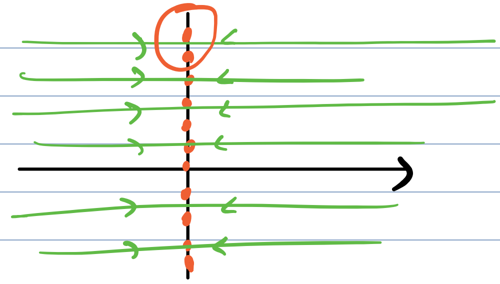
- Por estabilidad $\exists \delta$ tq si $z(t)$ soluc con c.i en $B(x_0,\delta) \Rightarrow$ $z(t) \in B(x_0,\varepsilon)$ $\forall t > t_{inicial}$.

- Por 1), $\exists t_\delta = T$ tq $y(t_\delta) \in B(x_0,\delta)$.
Por estabilidad la solución que arranca en $y(t_\delta)$ permanece $\forall t > t_\delta = T$ en $B(x_0,\varepsilon)$.

Es decir, $\forall t > T$, $y(t) \in B(x_0,\varepsilon)$ ✓

b) Ejemplo de eq estable que tenga órbita $y(t)$ tq $y(t) \xrightarrow{t\to+\infty} x_0$ pero x_0 no as.est.

Ej : $(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$



5) · Asumimos x_0 es pto crítico no aislado (de ptos críticos). , $(\dot{x} = f(x))$
Entonces x_0 no es asint. estable.

Prueba : x_0 crit no aislado : $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$, x_1 crítico.

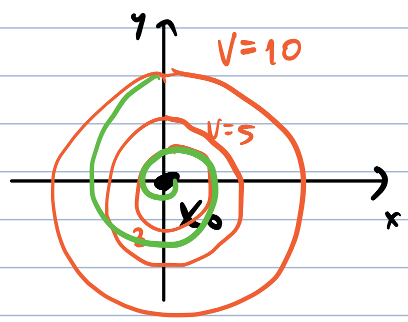
Veamos x_0 no asintóticamente estable.
Dado $\delta > 0$ cualquiera, por ser x_0 no aislado $\exists x_1$ crítico en $B(x_0, \delta)$
Pero la soluc con cond inicial x_1 es $y(t) = x_1\ \forall t$.
En part $y(t) \not\xrightarrow{t\to+\infty} x_0$, por lo tanto x_0 no es asint. estable.

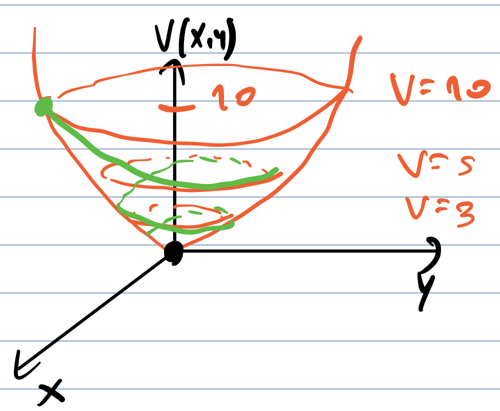
Contexto:
- $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^∞
- $\dot{X} = f(X)$ ec. autónoma en cond de Picard en $\mathbb{R}^2$, x_0 crítico
- Asumimos V decrece a lo largo de las soluciones : $\nabla V(X) \cdot \dot{X} \leq 0$
- Asumimos que x_0 es un mínimo

Entonces x_0 es estable

(Si $X(t)$ soluc. a ec. dif, voy a medir $V(X(t))$

obs. $\frac{d}{dt}\left(V(X(t))\right) = \nabla V(X(t)) \cdot \dot{X}(t) = \nabla V(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$)



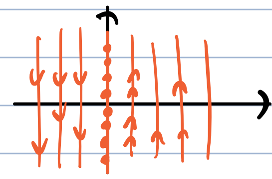


7) $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$ $(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ Buscar función de Lyapunov de la forma

$V(x,y) = ax^2 + by^2.$

a) $\lambda > 0$: $(0,0)$ repulsor

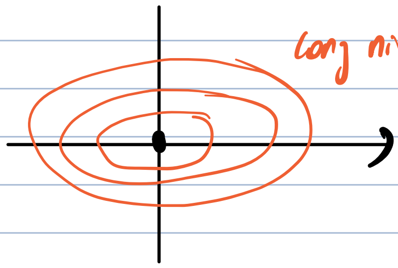
$\lambda < 0$: $(0,0)$ eq. asint. estable



$\lambda = 0$: $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = x_0 t + y_0 . \end{cases}$

pto de eq $(0, y_0)$
(no son estables).

b) $V(x,y) = ax^2 + by^2$, $a>0, b>0$



¿Cómo consigo V de Lyapunov?

Necesito $(V(x(t)))' \leq 0$

equiv a $\nabla V(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \leq 0$

sii $(2a\,x(t), 2b\,y(t)) \cdot (\lambda x(t), x(t) + \lambda y(t)) \leq 0$.

→ alcanza $a>0$, $b=0$ para $\dot{V} \leq 0$
(sin embargo desig. no es estricta).