MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

29 de septiembre de 2020

Sumario

CLASE 7.

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

1. Introducción.

2. Conceptos básicos de la teoría de elasticidad.

3. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo triangular.
   3.1 Selección de las funciones de desplazamientos.
   3.2 Obtención de las funciones de forma utilizando otra vía.

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 7. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS TRIANGULARES.

1. Introducción.
2. Conceptos básicos de la teoría de elasticidad. ón de la función de forma para un elemento 2D de tipo triangular.
3. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma.

1. Introducción.

En continuación con las aulas anteriores vamos a introducir otro tipo de elemento finito como parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea ya tenemos definidos los elementos de tipos resortes (spring), barra (truss) y vigas (Beam), y en esta clase vamos a formular nuestro primero elemento de tipo 2D en estado plano de deformaciones o tensiones.

El sistema de ecuaciones para un elemento 2D será más complejo en comparación con los elementos anteriores 1D.El procedimiento para desarrollar las ecuaciones será similar a la de los elementos de tipo viga unidimensional detallados anteriormente. En los desarrollos de los elementos siguientes será establecer principalmente los siguientes tres pasos de procedimientos como:

1. Continuación

En los desarrollos de los elementos siguientes será establecer principalmente los siguientes tres pasos de procedimientos como:

Procedimiento para la Formulación de Elementos

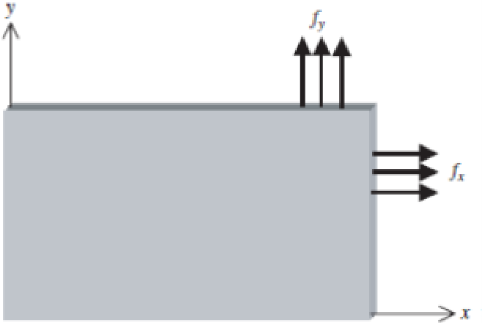
1. Construcción de las funciones de forma matriz **N** que satisfaga las 3 propiedades Ec. (5.8) -(5.9),
2. Formulación de la Matriz Desplazamiento-Deformación **B(x̂)**,
3. Cálculo de $\{\mathbf{k_e}\}\,;\{\sigma_\mathbf{e}\}\,;\{\varepsilon_\mathbf{e}\}$.

✓

2. Conceptos básicos de la teoría de elasticidad.

Elasticidad 2D. Estado plano de tensiones y estado plano de deformaciones.

Muchos de los problemas físico reales pueden ser tratados satisfactoriamente por la teoría de la elasticidad 2D (2 dimensiones) o *teoría de la elasticidad plana*.Estos presentan 2 casos generales de tipos de problemas en este análisis plano.



2. Continuación.

El estado plano de tensión puede ser definido como un estado de tensiones en el cual la tensión normal y las tensiones de cortante al plano de mayor área son cero.

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

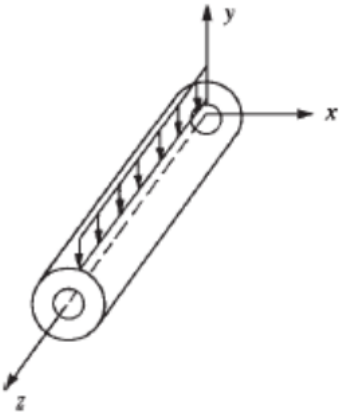
$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\epsilon_z \neq 0$$

Generalmente, aquellos elementos finos, cuyas dimensiones en el eje perpendicular al plano de mayor área son menores que las dos restantes y que están sometidos a cargas en las superficies de fronteras del plano de mayor área son estados planos de tensiones.

2. Continuación.

El **estado plano de deformación** es aquel estado en el cual la deformación normal y las deformaciones cortantes al plano de mayor área son cero.



2. Continuación.

Los estados planos de deformación son generalmente características de cuerpos con gran longitud en el eje perpendicular al plano x-y

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

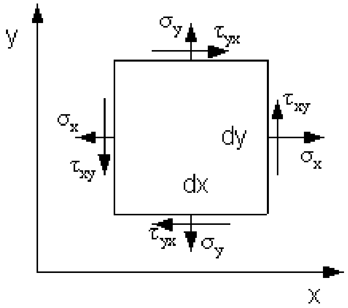
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z \neq 0$$

2. Continuación.

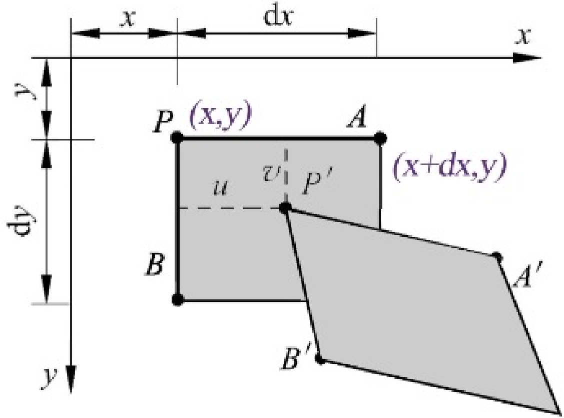
Estado bidimensional de tensiones y deformaciones.

En la figura representamos el estado de tensiones para el elemento infinitesimal con lados dx y dy tiene tensiones normales σ_x y σ_y actuando en las direcciones x y y respectivamente.



2. Continuación.

Relaciones Desplazamientos-Deformaciones para un problema 2D.



2. Continuación.

Representación del Tensor de 2do Orden de la deformación.

Representando la deformación independiente las cuales representamos mediante la notación de Voigt como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Clase No 7

2. Continuación.

La relación entre las tensiones - deformación para un material isotrópico en condiciones de estado plano de tensión, relación $\varepsilon(\sigma)$ en la notación de Voigt:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

2. Continuación.

La función reciproca resultado de la Ley de Hooke $\sigma(\varepsilon)$ para el estado plano de tensión como:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\upsilon^2)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \quad \therefore \quad \{\sigma\} = \left[C_{(2D-1)}\right]\{\varepsilon\}$$

La tensión normal ε_z no es igual a cero, ya que ε_z no solo depende de la tensión normal σ_z:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{-\upsilon(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{(1-\upsilon)} \qquad (2)$$

2. Continuación.

La relación entre las tensiones - deformación para un material isotrópico en condiciones de estado plano de deformación, relación $\sigma(\varepsilon)$ en la notación de Voigt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \{\sigma\} = \left[C_{(2D-2)}\right]\{\varepsilon\}$$

2. Continuación.

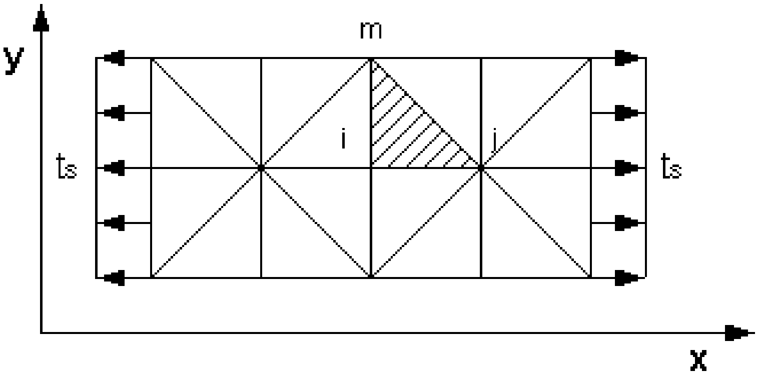
Podemos incorporar los valores y para la relación $\sigma(\varepsilon)$ en los estados plano de tensión y deformación como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\bar{E}}{(1-\bar{\upsilon}^2)} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\bar{\upsilon}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left\{ E.Plano \left\{ \begin{array}{l} Tension \begin{cases} \bar{E} = E \\ \bar{\nu} = \nu \end{cases} \\ \\ Deformacion \begin{cases} \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ \\ \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \end{cases} \end{array} \right. \right.$$

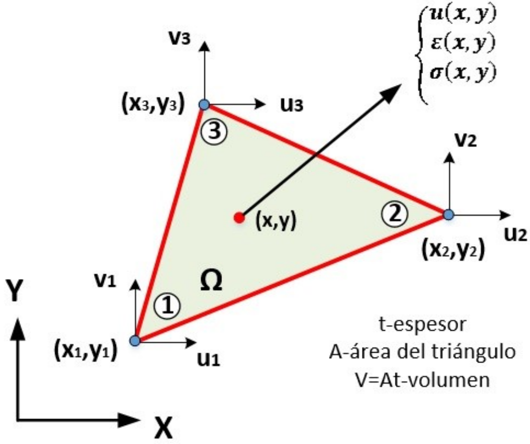
3. Formulación de la función de forma para un elemento 2D de tipo triangular.

Vamos a introducir las ecuaciones básicas necesarias para el elemento plano triangular consideremos una placa fina sujeta a una carga de tracción superficial $\mathbf{t_s}$



3. Continuación.

La placa se ha dividido en elementos triangulares planos, estos elementos tienes 3 nodos (1,2,3) y dos grados de libertad en cada nodo *(u,v)* asociados a las direcciones x y y ,



3.1 Selección de las funciones de desplazamientos.

Tenemos que establecer una relación entre los desplazamientos dentro del elemento con los desplazamientos nodales, sabemos que el grado del polinomio de interpolación es definido a partir del conocimiento del número de grados de libertad del elemento **(DOF=6)**.

Siendo definido por las componentes u y v en las direcciones x y y respectivamente. La función de desplazamiento del elemento será una función lineal:

$$\{\mathbf{u(x,y)}\} = \begin{cases} u(x,y) = C_0 + C_1 x + C_2 y \\ v(x,y) = C_3 + C_4 x + C_5 y \end{cases} \tag{3}$$

$$\{\mathbf{u(x,y)}\} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Clase No 7

3.1 Continuación

Para determinar los coeficientes C de la Ec. (3) vamos a sustituir las coordenadas de los puntos nodales:

$$\begin{cases} u(x_1, y_1) \equiv u_1 = C_0 + C_1 x_1 + C_2 y_1 \\ v(x_1, y_1) \equiv v_1 = C_3 + C_4 x_1 + C_5 y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u(x_2, y_2) \equiv u_2 = C_0 + C_1 x_2 + C_2 y_2 \\ v(x_2, y_2) \equiv v_2 = C_3 + C_4 x_2 + C_5 y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u(x_3, y_3) \equiv u_3 = C_0 + C_1 x_3 + C_2 y_3 \\ v(x_3, y_3) \equiv v_3 = C_3 + C_4 x_3 + C_5 y_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{bmatrix}$$

3.1 Continuación

Sustituyendo en las Ecuaciones.

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y})\} = \ \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,[\mathbf{A}]^{-1}\,\{u_e\} \ = [\mathbf{N}]\,\{u_e\} \tag{5}$$

Donde la función de forma $[\mathbf{N}]$, para el campo de desplazamiento está dada como:

$$[\mathbf{N}]_{\mathbf{2x6}} = \mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})_{\mathbf{2x6}}[\mathbf{A}]^{-\mathbf{1}}{}_{\mathbf{6x6}} \tag{6}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} x_2y_3 - y_2x_3 & 0 & x_3y_1 - y_3x_1 & 0 & x_1y_2 - y_1x_2 & 0 \\ y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 & 0 \\ 0 & x_2y_3 - y_2x_3 & 0 & x_3y_1 - y_3x_1 & 0 & x_1y_2 - y_1x_2 \\ 0 & y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

3.1 Continuación

Las funciones $\mathbf{N_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dada:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)\right]$$
$$N_2(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3) + (x_3 y_1 - y_3 x_1)\right.$$
$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}\left[x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - y_1 y_2)\right]$$

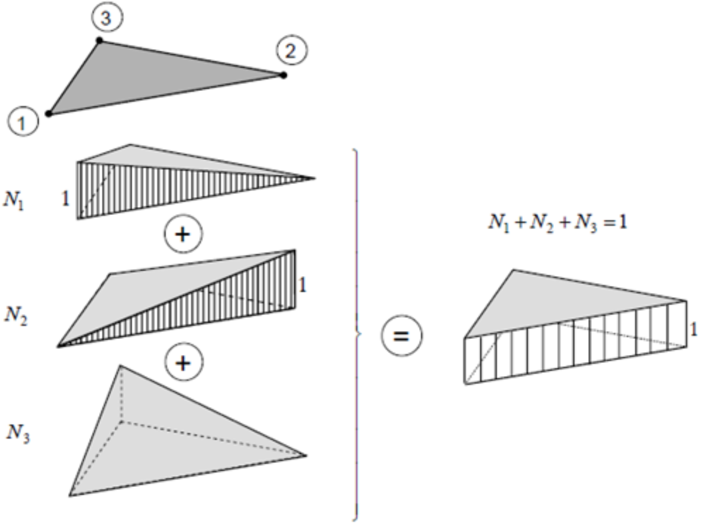
En el aula anterior fue obtenida la matriz de rigidez de un elemento genérico como:

$$\{\mathbf{k^e}\} = \int_{vol} \left[\mathbf{B}\left(\mathbf{x}\right)\right]^{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{D}] \cdot \left[\mathbf{B}\left(x\right)\right] \mathbf{dVol} \tag{7}$$

Clase No 7

3.1 Continuación

La funciones de forma para el elemento triangular:



3.1 Continuación

Recordando algunos de los conceptos de la teoría de la elasticidad

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc:cc:cc} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Denotamos por **[L]** la matriz que contiene las derivadas parciales, reescribiendo para $[\mathbf{B}(x)]$ $\therefore [\mathbf{L}][\mathbf{N}] = [\mathbf{B}(x)]$

3.1 Continuación

De las expresiones anteriores definimos la relación entre la deformación dentro del elemento como:

$$\{\varepsilon(x)\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}(x)\} = [\mathbf{L}][\mathbf{N}]\{u_e\} = [\mathbf{B}(x)]\{u_e\} \tag{9}$$

$$[\boldsymbol{B}(x)] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & \vdots & y_3 - y_1 & 0 & \vdots & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & \vdots & 0 & x_1 - x_3 & \vdots & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & \vdots & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & \vdots & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

En la ecuación anterior denotamos por $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$, reescribiendo para $[\mathbf{B}(x)]$.

$$[\mathbf{B}(x)] = \left[[\mathbf{B_1}]_{3x2} \quad [\mathbf{B_2}]_{3x2} \quad [\mathbf{B_3}]_{3x2}\right] \tag{10}$$

Clase No 7

3.1 Continuación

Siempre que el campo de desplazamientos sea linear, la matriz $\mathbf{B}(x)$ es constante dentro del subdominio y como consecuencia el campo de deformación y tensión también dentro del subdominio. Por esta razón el subdominio del triángulo es llamado **"constant strain triangle"- CST**.

Utilizando la Ec. (8) para las derivaciones de las funciones de interpolación de desplazamientos seleccionadas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = C_1; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = C_5 \;; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = C_2 + C_4$$

Las ecuaciones nos muestra una conclusión importante del elemento en estudio, las deformaciones calculadas se aplican a todos los puntos del elemento y son contantes a causa de la selección de las funciones de desplazamientos de primer grado para representar los desplazamientos, esta es una serie limitación del elemento triangular.

3.1 Continuación

Para la matriz de rigidez como:

$$[\mathbf{k}^e]_{\mathbf{6x6}} = [\mathbf{B}(x)]^T \left[\mathbf{C}_{(2D)}\right] [\mathbf{B}(x)] \int_{V=A\cdot t} \mathbf{dV} \qquad (11)$$

Calculando la Ec. (11) con área (A), espesor (t) y volumen (v=At).

$$[\mathbf{k^e}]_{\mathbf{6x6}} = [\mathbf{B}(x)]^T{}_{6x3} \left[\mathbf{C}_{(2D)}\right]_{\mathbf{3x3}} [\mathbf{B}(x)]_{3x6} \; A \cdot t \qquad (12)$$

Pudimos obtener de forma explícita la matriz de rigidez por ,pero en algunos casos la forma explícita de la matriz $[\mathbf{k^e}]$ no es tan fácil para obtener, entonces tenemos que resolver con la integración numérica (también llamada de **"cuadrature"**) para resolver la ecuación.

4. Obtención de las funciones de forma utilizando otra vía.

A continuación, consideremos la función de desplazamiento en x como:

$$u(x, y) = C_0 + C_1 x + C_2 y \tag{13}$$

Sustituyendo los valores nodales en la Ec. (13):

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 + C_1 x_1 + C_2 y_1 \\ u_2 &= C_0 + C_1 x_2 + C_2 y_2 \\ u_3 &= C_0 + C_1 x_3 + C_2 y_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (14) en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Clase No 7

4. Continuación.

Para determinar el valor de los coeficientes de $\mathbf{C_i}$ usamos la Regla de Cramer como:

$$C_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad ; \quad C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \quad ; \; C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \equiv det\left(\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right) = 2A$$

4. Continuación.

Vamos a representar la ecuación anterior como:

$$\begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$u(x,y) = u_1 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} + u_2 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} + u_3 \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \tag{17}$$

4. Continuación.

Definimos las funciones de formas Ec. (17) como:

$$N_1(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \; ; \quad N_2(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} \; ;$$

$$N_3(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}$$