



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Sistemas cuánticos abiertos

y un poquito de termodinámica cuántica

Andrés Vallejo

Instituto de Física- Facultad de Ingeniería - UdelaR

- 1 Sistemas abiertos
- 2 Trabajo y calor: de lo clásico a lo cuántico
- 3 Una formulación alternativa de la primera ley
- 4 Comentarios finales

- 1 **Sistemas abiertos**
- 2 Trabajo y calor: de lo clásico a lo cuántico
- 3 Una formulación alternativa de la primera ley
- 4 Comentarios finales

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles

Observables

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles
- Representados mediante operadores Hermíticos ($O^\dagger = O$)

Observables

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles
- Representados mediante operadores Hermíticos ($O^\dagger = O$)
- Resultados posibles de su medición **son los autovalores de O**

Observables

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles
- Representados mediante operadores Hermíticos ($O^\dagger = O$)
- Resultados posibles de su medición **son los autovalores de O**
 - ▶ Se obtienen con cierta probabilidad que depende del estado

Observables

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles
- Representados mediante operadores Hermíticos ($O^\dagger = O$)
- Resultados posibles de su medición **son los autovalores de O**
 - ▶ Se obtienen con cierta probabilidad que depende del estado
- Ejemplo: Energía: \rightarrow **operador Hamiltoniano (H)**
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow H$ gobierna la evolución
 - ▶ energías posibles E_1, \dots, E_N autovalores de H

Observables

- Término que refiere a las cantidades físicas medibles
- Representados mediante operadores Hermíticos ($O^\dagger = O$)
- Resultados posibles de su medición **son los autovalores de O**
 - ▶ Se obtienen con cierta probabilidad que depende del estado
- Ejemplo: Energía: \rightarrow **operador Hamiltoniano (H)**
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow H$ gobierna la evolución
 - ▶ energías posibles E_1, \dots, E_N autovalores de H
- Como el resultado de cada medida es aleatorio, nos interesan los **valores esperados: $\langle O \rangle$**

- ¿Cómo se caracteriza un estado en MC?

- ¿Cómo se caracteriza un estado en MC?
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$
 - ▶ se denominan **estados puros** (perfectamente conocidos, **cero entropía**)

- ¿Cómo se caracteriza un estado en MC?
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$
 - ▶ se denominan **estados puros** (perfectamente conocidos, **cero entropía**)
- Sin embargo, existen estados más generales:
 - ▶ $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}, p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$

- ¿Cómo se caracteriza un estado en MC?
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$
 - ▶ se denominan **estados puros** (perfectamente conocidos, **cero entropía**)
- Sin embargo, existen estados más generales:
 - ▶ $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$
 - ▶ Se denominan **mezclas estadísticas** (hay ignorancia clásica, **entropía >0**)

- ¿Cómo se caracteriza un estado en MC?
 - ▶ Sistema aislado $\rightarrow |\Psi\rangle \in \mathcal{H}$
 - ▶ se denominan **estados puros** (perfectamente conocidos, **cero entropía**)
- Sin embargo, existen estados más generales:
 - ▶ $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$
 - ▶ Se denominan **mezclas estadísticas** (hay ignorancia clásica, **entropía >0**)
- ¿Cuándo ocurren?
 - ▶ preparaciones imperfectas,
 - ▶ sistemas en equilibrio térmico con el ambiente
 - ▶ en una de las partes de un sistema entrelazado (**¿qué es eso?**)

- **Obs. 1:** estados de equilibrio térmico con el ambiente o entrelazados no pueden ocurrir en sistemas aislados

- **Obs. 1:** estados de equilibrio térmico con el ambiente o entrelazados no pueden ocurrir en sistemas aislados
 - ▶ **SON LOS SISTEMAS ABIERTOS LOS QUE TÍPICAMENTE SE ENCUENTRAN EN ESTADOS MEZCLADOS**

- **Obs. 1:** estados de equilibrio térmico con el ambiente o entrelazados no pueden ocurrir en sistemas aislados
 - ▶ **SON LOS SISTEMAS ABIERTOS LOS QUE TÍPICAMENTE SE ENCUENTRAN EN ESTADOS MEZCLADOS**
- **Obs. 2:** no es lo mismo una superposición: $|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle$ que una mezcla estadística $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$, a pesar de involucrar las mismas probabilidades:
 - ▶ la superposición es un estado puro; la mezcla, no
 - ▶ en la superposición el sistema se encuentra a priori (antes de medir) en **todos** los estados que figuran en ella, y en la mezcla **en uno solo**, que ignoramos.

- **Obs. 1:** estados de equilibrio térmico con el ambiente o entrelazados no pueden ocurrir en sistemas aislados
 - ▶ **SON LOS SISTEMAS ABIERTOS LOS QUE TÍPICAMENTE SE ENCUENTRAN EN ESTADOS MEZCLADOS**
- **Obs. 2:** no es lo mismo una superposición: $|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle$ que una mezcla estadística $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$, a pesar de involucrar las mismas probabilidades:
 - ▶ la superposición es un estado puro; la mezcla, no
 - ▶ en la superposición el sistema se encuentra a priori (antes de medir) en **todos** los estados que figuran en ella, y en la mezcla **en uno solo**, que ignoramos.
- ¿Cómo operamos matemáticamente con estados mezclados?
 - ▶ **OPERADOR DENSIDAD**

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

- Propiedades:
 - ▶ Hermítica ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinida positiva, $\text{tr}(\rho) = 1$.

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

- Propiedades:
 - ▶ Hermítica ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinida positiva, $\text{tr}(\rho) = 1$.
 - ▶ Elementos
 - ★ diagonales \rightarrow probabilidades
 - ★ no diagonales \rightarrow *coherencias*

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

- Propiedades:

- ▶ Hermítica ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinida positiva, $\text{tr}(\rho) = 1$.
- ▶ Elementos
 - ★ diagonales \rightarrow probabilidades
 - ★ no diagonales \rightarrow *coherencias*
- ▶ Estados:
 - ★ puros: $\text{tr}(\rho^2) = 1$ ($\rho^2 = \rho$)
 - ★ mezclas: $\text{tr}(\rho^2) < 1$. A la cantidad $\text{tr}(\rho^2)$ se la denomina *pureza* del estado

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

- Propiedades:

- ▶ Hermítica ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinida positiva, $\text{tr}(\rho) = 1$.
- ▶ Elementos
 - ★ diagonales \rightarrow probabilidades
 - ★ no diagonales \rightarrow *coherencias*
- ▶ Estados:
 - ★ puros: $\text{tr}(\rho^2) = 1$ ($\rho^2 = \rho$)
 - ★ mezclas: $\text{tr}(\rho^2) < 1$. A la cantidad $\text{tr}(\rho^2)$ se la denomina *pureza* del estado
- ▶ **Evolución:** $\rho(t) = U\rho U^\dagger$, $U =$ *operador evolución*

Operador densidad

- Para un estado puro $|\Psi\rangle \rightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$
- En general, para un ensemble de estados puros $\{|\varphi_i\rangle, p_i\}$:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$$

- Propiedades:

- ▶ Hermítica ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinida positiva, $\text{tr}(\rho) = 1$.
- ▶ Elementos
 - ★ diagonales \rightarrow probabilidades
 - ★ no diagonales \rightarrow *coherencias*
- ▶ Estados:
 - ★ puros: $\text{tr}(\rho^2) = 1$ ($\rho^2 = \rho$)
 - ★ mezclas: $\text{tr}(\rho^2) < 1$. A la cantidad $\text{tr}(\rho^2)$ se la denomina *pureza* del estado
- ▶ **Evolución:** $\rho(t) = \mathbf{U}\rho\mathbf{U}^\dagger$, $\mathbf{U} =$ *operador evolución*
- ▶ **Valores esperados:** si X observable, entonces $\langle\mathbf{X}\rangle = \text{tr}(\rho\mathbf{X})$

Sistemas multipartitos

- **Postulado:** el espacio de Hilbert asociado a un sistema multipartito es el producto tensorial de los correspondientes espacios de Hilbert asociados a sus componentes:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$$

- Si $\{|\varphi_i\rangle^A\}_{i=1,\dots,N}$, $\{|\varphi_j\rangle^B\}_{j=1,\dots,M}$ son sendas bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , entonces:

$$\{|\varphi_i\rangle^A \otimes |\varphi_j\rangle^B\}_{i=1,\dots,N;j=1,\dots,M}$$

es una base de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

- Un estado **puro** genérico del sistema global adopta la forma:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |\varphi_i\rangle^A \otimes |\varphi_j\rangle^B$$

- Dado un ket representando el estado de un sistema bipartito, **cabe preguntarse cuales son los estados de cada uno de los sistemas componentes.**

Entrelazamiento

- Dado un ket representando el estado de un sistema bipartito, **cabe preguntarse cuales son los estados de cada uno de los sistemas componentes.**
- Ej. 1: Si $|\varphi\rangle^{AB} = |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B$, entonces:

$$|\varphi\rangle^A = |0\rangle^A, \quad |\varphi\rangle^B = |1\rangle^B$$

Entrelazamiento

- Dado un ket representando el estado de un sistema bipartito, **cabe preguntarse cuales son los estados de cada uno de los sistemas componentes.**
- Ej. 1: Si $|\varphi\rangle^{AB} = |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B$, entonces:

$$|\varphi\rangle^A = |0\rangle^A, \quad |\varphi\rangle^B = |1\rangle^B$$

- Ej. 2: Si $|\varphi\rangle^{AB} = \frac{1}{2} [|0\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B]$

Entrelazamiento

- Dado un ket representando el estado de un sistema bipartito, **cabe preguntarse cuales son los estados de cada uno de los sistemas componentes.**
- Ej. 1: Si $|\varphi\rangle^{AB} = |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B$, entonces:

$$|\varphi\rangle^A = |0\rangle^A, \quad |\varphi\rangle^B = |1\rangle^B$$

- Ej. 2: Si $|\varphi\rangle^{AB} = \frac{1}{2} [|0\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B]$

$$\rightarrow |\varphi\rangle^A = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle^A + |1\rangle^A], \quad |\varphi\rangle^B = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle^B + |1\rangle^B]$$

Entrelazamiento

- Dado un ket representando el estado de un sistema bipartito, **cabe preguntarse cuales son los estados de cada uno de los sistemas componentes.**

- Ej. 1: Si $|\varphi\rangle^{AB} = |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B$, entonces:

$$|\varphi\rangle^A = |0\rangle^A, \quad |\varphi\rangle^B = |1\rangle^B$$

- Ej. 2: Si $|\varphi\rangle^{AB} = \frac{1}{2} [|0\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |0\rangle^A \otimes |1\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B]$

$$\rightarrow |\varphi\rangle^A = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle^A + |1\rangle^A], \quad |\varphi\rangle^B = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle^B + |1\rangle^B]$$

- Ej. 3: Si $|\varphi\rangle^{AB} = \frac{1}{2} [|0\rangle^A \otimes |0\rangle^B + |1\rangle^A \otimes |1\rangle^B] \dots$

Entrelazamiento 2

- En el caso anterior no existen kets de los respectivos espacios tales que su producto sea $|\varphi\rangle^{AB} \rightarrow$ **ESTADO ENTRELAZADO**

Entrelazamiento 2

- En el caso anterior no existen kets de los respectivos espacios tales que su producto sea $|\varphi\rangle^{AB} \rightarrow$ **ESTADO ENTRELAZADO**
- A pesar de que el estado global es puro, **los estados locales no lo son** \rightarrow **al ser estados mezclados, deben ser descritos mediante matrices densidad**

Entrelazamiento 2

- En el caso anterior no existen kets de los respectivos espacios tales que su producto sea $|\varphi\rangle^{AB} \rightarrow$ **ESTADO ENTRELAZADO**
- A pesar de que el estado global es puro, **los estados locales no lo son**
 \rightarrow **al ser estados mezclados, deben ser descritos mediante matrices densidad**
- **Información completa sobre el estado global de un sistema no implica información completa sobre las partes de un sistema**

Entrelazamiento 2

- En el caso anterior no existen kets de los respectivos espacios tales que su producto sea $|\varphi\rangle^{AB} \rightarrow$ **ESTADO ENTRELAZADO**
- A pesar de que el estado global es puro, **los estados locales no lo son** \rightarrow **al ser estados mezclados, deben ser descritos mediante matrices densidad**
- **Información completa sobre el estado global de un sistema no implica información completa sobre las partes de un sistema**
- Sistemas entrelazados poseen correlaciones imposibles de alcanzar en sistemas clásicos ("**Acción fantasmal a distancia**")

Operador densidad reducida

- Sea un sistema bipartito AB aislado, descrito por su operador densidad ρ_{AB}
- En muchos casos las partes del sistema no se encuentran estados puros... ¿Cómo las describo?

Operador densidad reducida

- Sea un sistema bipartito AB aislado, descrito por su operador densidad ρ_{AB}
- En muchos casos las partes del sistema no se encuentran estados puros... ¿Cómo las describo?
- Es posible definir un *operador densidad reducida* ρ_A tal que, para todo observable **local** X del sistema A , satisface:

$$\langle X \rangle = \text{tr} [\rho_{AB}(X \otimes \mathcal{I}_B)] = \text{tr} [\rho_A X]$$

Operador densidad reducida

- Sea un sistema bipartito AB aislado, descrito por su operador densidad ρ_{AB}
- En muchos casos las partes del sistema no se encuentran estados puros... ¿Cómo las describo?
- Es posible definir un *operador densidad reducida* ρ_A tal que, para todo observable **local** X del sistema A , satisface:

$$\langle X \rangle = \text{tr} [\rho_{AB}(X \otimes \mathcal{I}_B)] = \text{tr} [\rho_A X]$$

- Se demuestra que

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j \langle \varphi_B | \rho_{AB} | \varphi_B \rangle$$

donde $\{|\varphi_B\rangle\}$ es una base ortonormal cualquiera del espacio \mathcal{H}_B

Operador densidad reducida

- Sea un sistema bipartito AB aislado, descrito por su operador densidad ρ_{AB}
- En muchos casos las partes del sistema no se encuentran estados puros... ¿Cómo las describo?
- Es posible definir un *operador densidad reducida* ρ_A tal que, para todo observable **local** X del sistema A , satisface:

$$\langle X \rangle = \text{tr} [\rho_{AB}(X \otimes \mathcal{I}_B)] = \text{tr} [\rho_A X]$$

- Se demuestra que

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j \langle \varphi_B | \rho_{AB} | \varphi_B \rangle$$

donde $\{|\varphi_B\rangle\}$ es una base ortonormal cualquiera del espacio \mathcal{H}_B

- Evolución: $\rho_A(\mathbf{t}) = \sum_j M \rho_A(\mathbf{0}) M^\dagger$ (**no unitaria**)

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?
- Una forma es mediante la *Entropía de von Neumann* de la matriz densidad, definida como:

$$S_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho)$$

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?
- Una forma es mediante la *Entropía de von Neumann* de la matriz densidad, definida como:

$$\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho)$$

- Propiedades:
 - ▶ Estado puro $\rightarrow \mathbf{S}_{vN} = 0$

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?
- Una forma es mediante la *Entropía de von Neumann* de la matriz densidad, definida como:

$$\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho)$$

- Propiedades:
 - ▶ Estado puro $\rightarrow \mathbf{S}_{vN} = 0$
 - ▶ Estado máximamente mezclado $\rightarrow \mathbf{S}_{vN} = k_B \log(\dim(\mathcal{H}))$

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?
- Una forma es mediante la *Entropía de von Neumann* de la matriz densidad, definida como:

$$S_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho)$$

- Propiedades:
 - ▶ Estado puro $\rightarrow S_{vN} = 0$
 - ▶ Estado máximamente mezclado $\rightarrow S_{vN} = k_B \log(\dim(\mathcal{H}))$
 - ▶ Si un sistema AB se encuentra en un estado puro, $S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B)$ y ambas cuantifican el grado de entrelazamiento entre A y B

Entropía cuántica

- ¿Cómo cuantificamos el grado de incerteza de una mezcla estadística?
- Una forma es mediante la *Entropía de von Neumann* de la matriz densidad, definida como:

$$S_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho)$$

- Propiedades:

- ▶ Estado puro $\rightarrow S_{vN} = 0$
- ▶ Estado máximamente mezclado $\rightarrow S_{vN} = k_B \log(\dim(\mathcal{H}))$
- ▶ Si un sistema AB se encuentra en un estado puro, $S_{vN}(\rho_A) = S_{vN}(\rho_B)$ y ambas cuantifican el grado de entrelazamiento entre A y B
- ▶ Si $\{\lambda_j\}$ es el conjunto de autovalores de ρ , entonces:

$$S_{vN} = - \sum_j \lambda_j \log(\lambda_j)$$

(es la entropía de Gibbs (Shannon) de la distribución de autovalores de la matriz densidad)

- 1 Sistemas abiertos
- 2 Trabajo y calor: de lo clásico a lo cuántico**
- 3 Una formulación alternativa de la primera ley
- 4 Comentarios finales

Trabajo y calor: visión clásica

$$\text{Trabajo: } W = W_{macro}^{ext}$$

- "Macro": cuantificable por medio de la variación de una coordenada X perteneciente a la escala del observador (medible)
- Asociado al movimiento colectivo **ordenado** de muchos grados de libertad
- $\delta W = YdX$ (Ej: $\delta W = PdV$)
 - ▶ Y = fuerza generalizada (modificable mediante parámetro de control)

Trabajo y calor: visión clásica

$$\text{Trabajo: } W = W_{macro}^{ext}$$

- "Macro": cuantificable por medio de la variación de una coordenada X perteneciente a la escala del observador (medible)
- Asociado al movimiento colectivo **ordenado** de muchos grados de libertad
- $\delta W = YdX$ (Ej: $\delta W = PdV$)
 - ▶ Y = fuerza generalizada (modificable mediante parámetro de control)
- No hay incerteza asociada → **no tiene vinculación con la entropía**

Trabajo y calor: visión clásica

$$\text{Trabajo: } W = W_{macro}^{ext}$$

- "Macro": cuantificable por medio de la variación de una coordenada X perteneciente a la escala del observador (medible)
- Asociado al movimiento colectivo **ordenado** de muchos grados de libertad
- $\delta W = YdX$ (Ej: $\delta W = PdV$)
 - ▶ Y = fuerza generalizada (modificable mediante parámetro de control)
- No hay incerteza asociada \rightarrow **no tiene vinculación con la entropía**

$$\text{Calor: } Q = W_{micro}^{ext}$$

- "Micro": Interacciones responsables ocurren en una escala inaccesible al experimentador
- Asociada al movimiento **desordenado** a nivel microscópico (choques, etc) en la frontera del sistema ("diferencia de temperatura")

Trabajo y calor: visión clásica

$$\text{Trabajo: } W = W_{macro}^{ext}$$

- "Macro": cuantificable por medio de la variación de una coordenada X perteneciente a la escala del observador (medible)
- Asociado al movimiento colectivo **ordenado** de muchos grados de libertad
- $\delta W = YdX$ (Ej: $\delta W = PdV$)
 - ▶ Y = fuerza generalizada (modificable mediante parámetro de control)
- No hay incerteza asociada → **no tiene vinculación con la entropía**

$$\text{Calor: } Q = W_{micro}^{ext}$$

- "Micro": Interacciones responsables ocurren en una escala inaccesible al experimentador
- Asociada al movimiento **desordenado** a nivel microscópico (choques, etc) en la frontera del sistema ("diferencia de temperatura")
- Hay incerteza → **su flujo transporta (y casi siempre genera) entropía** (Clausius):

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

Trabajo y calor: mecánica estadística

- Sistema de N partículas con espectro discreto E_1, \dots, E_N

Trabajo y calor: mecánica estadística

- Sistema de N partículas con espectro discreto E_1, \dots, E_N
- Estado caracterizado por las fracciones de ocupación $\{p_j = n_j/N\}$ (distribución de probabilidad)

Trabajo y calor: mecánica estadística

- Sistema de N partículas con espectro discreto E_1, \dots, E_N
- Estado caracterizado por las fracciones de ocupación $\{p_j = n_j/N\}$ (distribución de probabilidad)
- Para un valor de energía dado E :
 - ▶ $S = k_B \log(\Omega) \simeq -k_B \sum_j p_j \ln p_j$ (Gibbs)
 - ▶ $E = \sum_j p_j E_j$

Trabajo y calor: mecánica estadística

- Sistema de N partículas con espectro discreto E_1, \dots, E_N
- Estado caracterizado por las fracciones de ocupación $\{p_j = n_j/N\}$ (distribución de probabilidad)
- Para un valor de energía dado E :
 - ▶ $\mathbf{S} = k_B \log(\Omega) \simeq -k_B \sum_j p_j \ln p_j$ (Gibbs)
 - ▶ $\mathbf{E} = \sum_j p_j E_j$
- Como $\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{p}_j E_j + \sum_j p_j \dot{E}_j$, es razonable definir:

Trabajo y calor: mecánica estadística

- Sistema de N partículas con espectro discreto E_1, \dots, E_N
- Estado caracterizado por las fracciones de ocupación $\{p_j = n_j/N\}$ (distribución de probabilidad)
- Para un valor de energía dado E :
 - ▶ $\mathbf{S} = k_B \log(\Omega) \simeq -k_B \sum_j p_j \ln p_j$ (Gibbs)
 - ▶ $\mathbf{E} = \sum_j p_j E_j$
- Como $\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{p}_j E_j + \sum_j p_j \dot{E}_j$, es razonable definir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \sum_j \dot{p}_j E_j \\ \dot{\mathbf{W}} = \sum_j p_j \dot{E}_j \end{cases}$$

- ▶ Trabajo \rightarrow variación del espectro*
- ▶ Calor \rightarrow cambios en las poblaciones

Trabajo y calor en mecánica cuántica [1]

- Energía interna: $\mathbf{E} = \langle \mathbf{H} \rangle = \text{tr}[\rho \mathbf{H}] \rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] + \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}]$
- Razones de cambio de E :
 - ▶ cambios en el estado ρ : $\text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] = \sum_j \dot{\rho}_j E_j$
 - ▶ cambios en H : $\text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] = \sum_j \rho_j \dot{E}_j$

Trabajo y calor en mecánica cuántica [1]

- Energía interna: $\mathbf{E} = \langle \mathbf{H} \rangle = \text{tr}[\rho \mathbf{H}] \rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] + \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}]$
- Razones de cambio de E :
 - ▶ cambios en el estado ρ : $\text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] = \sum_j \dot{\rho}_j E_j$
 - ▶ cambios en H : $\text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] = \sum_j \rho_j \dot{E}_j$
- Recordemos que $\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \rightarrow$ función de ρ

Trabajo y calor en mecánica cuántica [1]

- Energía interna: $\mathbf{E} = \langle \mathbf{H} \rangle = \text{tr}[\rho \mathbf{H}] \rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] + \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}]$
- Razones de cambio de E :
 - ▶ cambios en el estado ρ : $\text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] = \sum_j \dot{\rho}_j E_j$
 - ▶ cambios en H : $\text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] = \sum_j \rho_j \dot{E}_j$
- Recordemos que $\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \rightarrow$ **función de ρ**
- Por analogía con el caso clásico, es razonable definir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] \\ \dot{\mathbf{W}} = \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] \end{cases}$$

Trabajo y calor en mecánica cuántica [1]

- Energía interna: $\mathbf{E} = \langle \mathbf{H} \rangle = \text{tr}[\rho \mathbf{H}] \rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] + \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}]$
- Razones de cambio de E :
 - ▶ cambios en el estado ρ : $\text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] = \sum_j \dot{\rho}_j E_j$
 - ▶ cambios en H : $\text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] = \sum_j \rho_j \dot{E}_j$
- Recordemos que $\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \rightarrow$ **función de ρ**
- Por analogía con el caso clásico, es razonable definir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Q}} = \text{tr}[\dot{\rho} \mathbf{H}] \\ \dot{\mathbf{W}} = \text{tr}[\rho \dot{\mathbf{H}}] \end{cases}$$

- Ampliamente usadas durante los últimos 45 años

[1] R. Alicki, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, L103 (1979)

- 1 Sistemas abiertos
- 2 Trabajo y calor: de lo clásico a lo cuántico
- 3 Una formulación alternativa de la primera ley**
- 4 Comentarios finales

Una formulación alternativa: motivación

- Clave: Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$$

- ▶ Permite calcular el valor esperado de cualquier observable O en **un sistema aislado**
- ▶ $[H, O] = HO - OH$ (conmutador)

Una formulación alternativa: motivación

- Clave: Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$$

- ▶ Permite calcular el valor esperado de cualquier observable O en **un sistema aislado**
 - ▶ $[H, O] = HO - OH$ (conmutador)
- En particular, si $H \neq H(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{cte.}$$

Una formulación alternativa: motivación

- Clave: Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$$

- ▶ Permite calcular el valor esperado de cualquier observable O en **un sistema aislado**
 - ▶ $[H, O] = HO - OH$ (conmutador)
- En particular, si $H \neq H(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{cte.}$$

- Consistente con el hecho de que sistemas aislados tienen energía constante \rightarrow puede considerarse la expresión de la primera ley para esos sistemas (trivial).

Una formulación alternativa: motivación

- Clave: Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$$

- ▶ Permite calcular el valor esperado de cualquier observable O en **un sistema aislado**
 - ▶ $[H, O] = HO - OH$ (conmutador)
- En particular, si $H \neq H(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{cte.}$$

- Consistente con el hecho de que sistemas aislados tienen energía constante \rightarrow puede considerarse la expresión de la primera ley para esos sistemas (trivial).
- Y en sistemas abiertos?

Una formulación alternativa: motivación

- Clave: Teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$$

- ▶ Permite calcular el valor esperado de cualquier observable O en **un sistema aislado**
 - ▶ $[H, O] = HO - OH$ (conmutador)
- En particular, si $H \neq H(t)$:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\langle H \rangle}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{cte.}$$

- Consistente con el hecho de que sistemas aislados tienen energía constante \rightarrow puede considerarse la expresión de la primera ley para esos sistemas (trivial).
- Y en sistemas abiertos? **Necesitamos generalizar el teorema de Ehrenfest**

Teorema de Ehrenfest - Generalización

Esbozo de la demostración:

- $$\begin{cases} \langle O \rangle = \text{tr}(\rho O) \\ \rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \end{cases}$$

Teorema de Ehrenfest - Generalización

Esbozo de la demostración:

- $$\begin{cases} \langle O \rangle = \text{tr}(\rho O) \\ \rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \end{cases} \rightarrow \langle O \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle$$
$$\Rightarrow \frac{d\langle O \rangle}{dt} = \sum_j \frac{d\lambda_j}{dt} \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle + \sum_j \lambda_j \frac{d\langle \psi_j | O | \psi_j \rangle}{dt}$$

Teorema de Ehrenfest - Generalización

Esbozo de la demostración:

$$\bullet \begin{cases} \langle O \rangle = \text{tr}(\rho O) \\ \rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \end{cases} \rightarrow \langle O \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle$$
$$\Rightarrow \frac{d\langle O \rangle}{dt} = \sum_j \frac{d\lambda_j}{dt} \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle + \sum_j \lambda_j \frac{d\langle \psi_j | O | \psi_j \rangle}{dt}$$

• ρ Hermítica \rightarrow autovectores ortonormales:

$$\exists T \text{ unitaria } (TT^\dagger = \mathbb{I}) / |\psi_j(\mathbf{t} + d\mathbf{t})\rangle = T(\mathbf{t}, \mathbf{t} + d\mathbf{t}) |\psi_j(\mathbf{t})\rangle$$

Teorema de Ehrenfest - Generalización

Esbozo de la demostración:

- $$\begin{cases} \langle O \rangle = \text{tr}(\rho O) \\ \rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| \end{cases} \rightarrow \langle O \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle$$
$$\Rightarrow \frac{d\langle O \rangle}{dt} = \sum_j \frac{d\lambda_j}{dt} \langle \psi_j | O | \psi_j \rangle + \sum_j \lambda_j \frac{d\langle \psi_j | O | \psi_j \rangle}{dt}$$

- ρ Hermítica \rightarrow autovectores ortonormales:

$$\exists T \text{ unitaria } (TT^\dagger = \mathbb{I}) / |\psi_j(\mathbf{t} + d\mathbf{t})\rangle = T(\mathbf{t}, \mathbf{t} + d\mathbf{t}) |\psi_j(\mathbf{t})\rangle$$

- $T(\mathbf{t}, \mathbf{t} + d\mathbf{t}) \simeq \mathbb{I} - i\Omega d\mathbf{t}$, Ω Hermítico

Teorema de Ehrenfest - Generalización (II) [7]

- El resultado es:

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial t} \right\rangle + i\langle [\Omega, \mathbf{O}] \rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$$

Teorema de Ehrenfest - Generalización (II) [7]

- El resultado es:

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial t} \right\rangle + i\langle [\Omega, \mathbf{O}] \rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$$

- Comparando con $\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, \mathbf{O}] \rangle$, notamos que:
 - ▶ Ω juega el rol de H

Teorema de Ehrenfest - Generalización (II) [7]

- El resultado es:

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial t} \right\rangle + i\langle [\Omega, \mathbf{O}] \rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$$

- Comparando con $\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$, notamos que:
 - ▶ Ω juega el rol de H
 - ▶ Nuevo término: $\sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$ **vinculado a la variación de los autovalores** (recordar esto!)

Teorema de Ehrenfest - Generalización (II) [7]

- El resultado es:

$$\frac{d\langle \mathbf{O} \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{O}}{\partial t} \right\rangle + i\langle [\Omega, \mathbf{O}] \rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$$

- Comparando con $\frac{d\langle O \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i\langle [H, O] \rangle$, notamos que:
 - ▶ Ω juega el rol de H
 - ▶ Nuevo término: $\sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | \mathbf{O} | \psi_j \rangle$ **vinculado a la variación de los autovalores** (recordar esto!)
- En particular, aplicado al propio H (recordar que $E = \langle H \rangle$):

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} + i[\Omega, H] \right\rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle$$

[7] A. Vallejo, A. Romanelli, R. Donangelo, en revisión (2023)

Primera ley: versión alternativa

- Demostramos:

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} + i[\Omega, H] \right\rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle$$

Primera ley: versión alternativa

- Demostramos:

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} + i[\Omega, H] \right\rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle$$

- Observación clave: $\mathbf{S}_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \rightarrow$ no es función de todo el operador densidad, sino solamente de sus autovalores λ_j :

$$\dot{\mathbf{S}}_{vN} = - \sum_j \dot{\lambda}_j \log(\lambda_j)$$

Primera ley: versión alternativa

- Demostramos:

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} + i[\Omega, H] \right\rangle + \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle$$

- Observación clave: $S_{vN} = -k_B \text{tr}(\rho \log \rho) \rightarrow$ no es función de todo el operador densidad, sino solamente de sus autovalores λ_j :

$$\dot{S}_{vN} = - \sum_j \dot{\lambda}_j \log(\lambda_j)$$

- Notando que solo el último término es concomitante con el cambio de entropía, se propone:

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{Q} \equiv \sum_j \dot{\lambda}_j \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle \\ \dot{W} \equiv \langle \mathcal{P} \rangle, \quad \mathcal{P} = \frac{\partial H}{\partial t} + i[\Omega, H] \end{cases}$$

- Consistente con Alipour *et al.* (2022), Ahmadi *et al.* (2023)

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula
- Principio de incertidumbre: $\langle i[\Omega, H] \rangle$ **es una medida de la incompatibilidad de los operadores**

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula
- Principio de incertidumbre: $\langle i[\Omega, H] \rangle$ **es una medida de la incompatibilidad de los operadores**
 - ▶ **Mayor incompatibilidad implica mayor desviación respecto a la evolución natural**

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula
- Principio de incertidumbre: $\langle i[\Omega, H] \rangle$ **es una medida de la incompatibilidad de los operadores**
 - ▶ **Mayor incompatibilidad implica mayor desviación respecto a la evolución natural \rightarrow se requiere más trabajo**

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula
- Principio de incertidumbre: $\langle i[\Omega, H] \rangle$ **es una medida de la incompatibilidad de los operadores**
 - ▶ **Mayor incompatibilidad implica mayor desviación respecto a la evolución natural \rightarrow se requiere más trabajo**

Operador potencia. Discusión

- Como H, Ω Hermíticos $\rightarrow \mathcal{P} = \dot{H} + i[\Omega, H]$ Hermítico \rightarrow asociado a un observable \rightarrow **OPERADOR POTENCIA**
- $\dot{\mathcal{W}} = \langle \mathcal{P} \rangle$ tiene dos contribuciones:
 - ▶ $\langle \dot{H} \rangle = \text{tr}(\rho \dot{H})$ (contribución usual)
 - ▶ $i\langle [\Omega, H] \rangle$ (asociada a variación de los autoestados)
- Si no hay interacción con el ambiente o si esta no modifica la rotación de los autoestados de ρ , la nueva contribución se anula
- Principio de incertidumbre: $\langle i[\Omega, H] \rangle$ **es una medida de la incompatibilidad de los operadores**
 - ▶ **Mayor incompatibilidad implica mayor desviación respecto a la evolución natural \rightarrow se requiere más trabajo**
- Muy abstracto... veamos un ejemplo concreto

- 1 Sistemas abiertos
- 2 Trabajo y calor: de lo clásico a lo cuántico
- 3 Una formulación alternativa de la primera ley
- 4 Comentarios finales**

Resumen

- Generalizamos el teorema de Ehrenfest a sistemas abiertos. Ello permite:

Resumen

- Generalizamos el teorema de Ehrenfest a sistemas abiertos. Ello permite:
 - ▶ Deducir definiciones alternativas de calor y trabajo más próximas al espíritu original de Clausius, consistentes con otras propuestas recientes
 - ▶ Cuantificar los efectos térmicos y mecánicos en los valores esperados de cualquier observable
 - ▶ Mostrar que, en algunos casos, la potencia mecánica es un observable, y dar una interpretación física de la misma (rotaciones en \mathcal{H})
 - ▶ Proporcionar nuevas interpretaciones de procesos clásicos

Resumen

- Generalizamos el teorema de Ehrenfest a sistemas abiertos. Ello permite:
 - ▶ Deducir definiciones alternativas de calor y trabajo más próximas al espíritu original de Clausius, consistentes con otras propuestas recientes
 - ▶ Cuantificar los efectos térmicos y mecánicos en los valores esperados de cualquier observable
 - ▶ Mostrar que, en algunos casos, la potencia mecánica es un observable, y dar una interpretación física de la misma (rotaciones en \mathcal{H})
 - ▶ Proporcionar nuevas interpretaciones de procesos clásicos
- Algunas líneas abiertas:
 - ▶ Entrelazamiento como consecuencia de la asimetría de calores
 - ▶ Reinterpretación de otros procesos
 - ▶ Análisis de ciclos cuánticos de potencia y, en particular, de su eficiencia

Muchas gracias