Práctico 7

1. En los siguientes casos hallar la serie de Fourier de la función f de período 2π:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

   b) $f(x) = e^{\alpha x}$, si $-\pi < x \leq \pi$

   c) $f(x) = \begin{cases} \pi & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$

2. *a*) Hallar la serie de Fourier de la función 2π-peródica definida como:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases}.$$

   b) Sustituyendo x por π, demostrar que:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

   c) A partir de lo anterior, concluir que:

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. *a*) Hallar la serie de Fourier de la función 2π-peródica definida por

   $$f(x) = e^x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

   b) A partir de la serie, demostrar que:

   $$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1\right).$$

4. Probar que la serie de Fourier de tipo seno de la función constante $f(x) = \pi/4$ es:

   $$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ..., \quad 0 < x < \pi.$$

   ¿Qué suma se obtiene poniendo $x = \pi/2$? ¿Cuál es la serie de Fourier de tipo coseno de esa función?

5. En los siguientes casos, escribir la serie de Fourier de senos y la serie de Fourier de cosenos de la función f definida en $(0, \pi)$ como:

   a) $f(x) = 1$

   b) $f(x) = \pi - x$

   c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$

6. Probar las siguientes igualdades que aparecen en el práctico anterior:

a) $x(x-\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3}\,\mathrm{sen}(kx)$

b) $\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\,\mathrm{sen}\left((2k+1)\pi x\right) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 1-x & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

7. ¿Existe alguna función 2π-peródica cuya serie de Fourier asociada sea $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$?

8. En los siguientes casos demostrar la validez de la igualdad:

   a) $x^2 = 2\left(\pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right)$, $\forall x \in [0, 2\pi]$

   b) $\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\mathrm{sen}(2nx)}{4n^2-1}$, $\forall x \in (0,\pi)$

   c) $|\,\mathrm{sen}\,x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$, $x \in \mathbb{R}$

   A partir de la última igualdad, calcular $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

9. Se considera la función f de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$.

   a) Hallar su serie de Fourier, $a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$.

   b) Si escribimos $a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Muestre que $\frac{\partial}{\partial x} f_n(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) ¿Qué se puede decir acerca de la igualdad $\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f_n(x)$?