TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

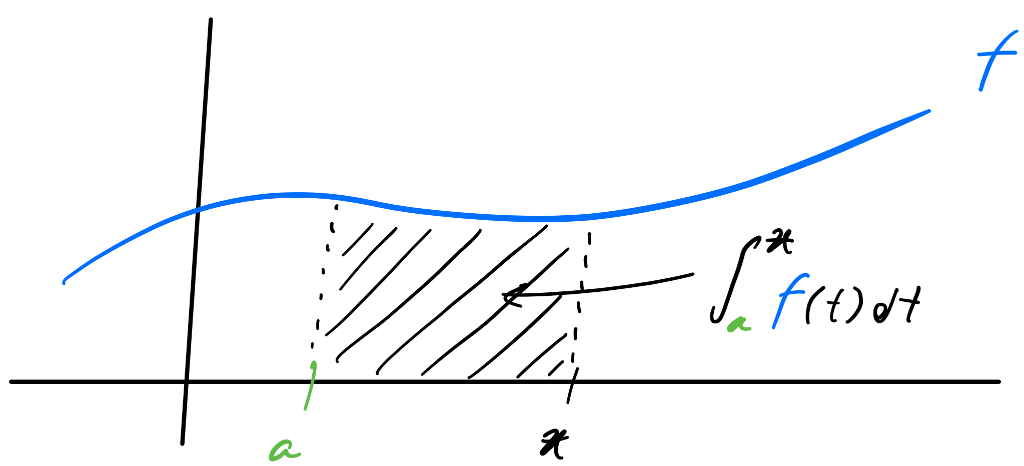
Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $a \in I$.

Consideremos $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces F es derivable y $F' = f$

En otras palabras F es una primitiva de f

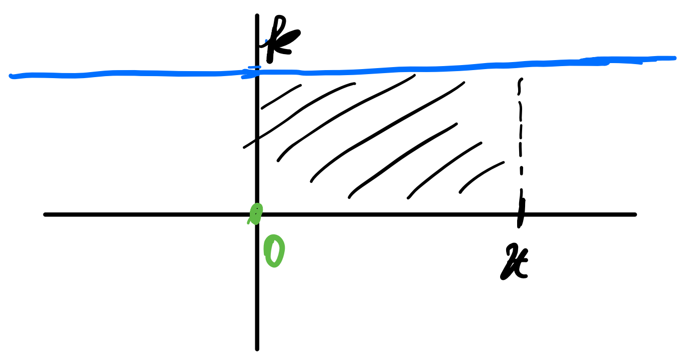


Ejemplos:

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = k$ (cte)

$$F(x) = \int_0^x k\,dt = kx$$

$$F'(x) = (kx)' = k = f(x)$$

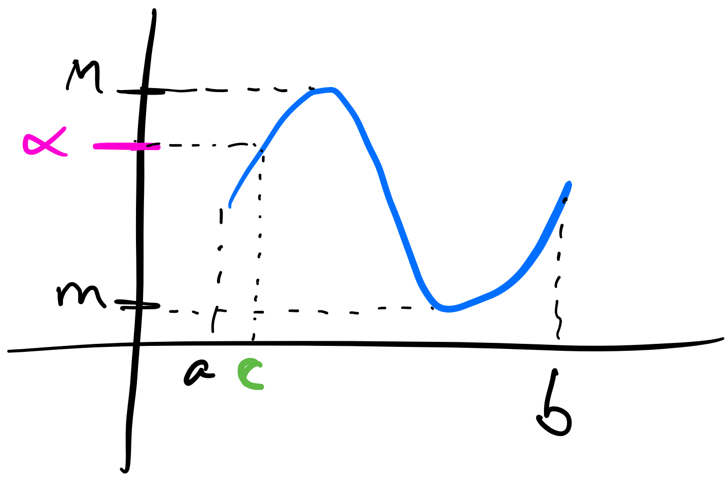


Observar que en este caso $F' = f$. Esto ocurre siempre por el T.F.C

Teorema de valor medio para funciones continuas (Darboux)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $m = \min f$; $M = \max f$. Entonces para todo $\alpha \in (m, M)$, existe $c \in [a,b]$ /

$$f(c) = \alpha$$

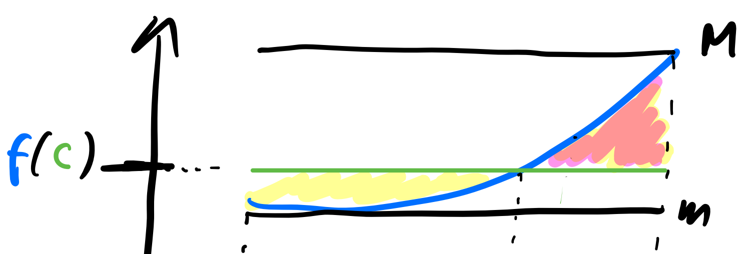


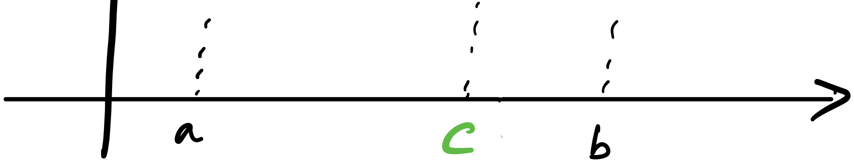
Teorema de Valor Medio para Integrales

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Entonces $\exists\ c \in (a,b)$ /

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a)$$





Dem del TVMI: Como f es continua y está definida en un intervalo cerrado, el teorema de Weierstrass nos dice que $\exists\ m = \min f$ y $M = \max f$.

$$m \le f(x) \le M \qquad \forall x \in [a,b]$$

Por monotonía de la integral, tenemos

$$\underbrace{\int_a^b m\,dt}_{= \, m(b-a)} \le \int_a^b f(t)\,dt \le \underbrace{\int_a^b M\,dt}_{= \, M(b-a)}$$

dividiendo por $(b-a)$ obtenemos

$$m = \frac{m \cdot \cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} \le \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{(b-a)} \le \frac{M \cdot \cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} = M$$

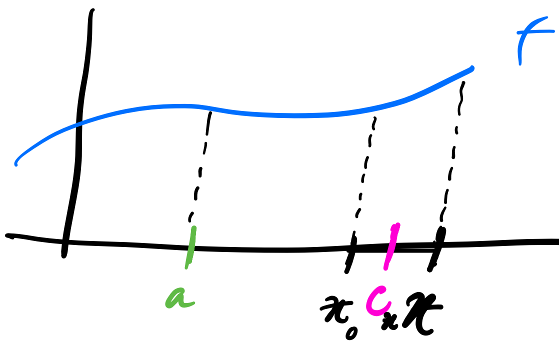
Entonces, por Darboux, $\exists\ c \in (a,b)\ /$

$$f(c) = \int^b f(t)\,dt$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{(b-a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a) \quad \text{para algún } c \in (a,b)}$$

Prueba del T. F. C



Tomemos $x_0 \in I$ cualquiera.
Queremos ver que

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tiene

derivada $f(x_0)$ en el punto x_0

Para calcular $F'(x_0)$ planteamos el límite del cociente incremental.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

con la esperanza de que nos de $f(x_0)$

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Aditividad
Respecto del

Intervalo

Entonces $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0} =$$

$$= f(c_x) \quad \text{para algún } c_x \in [x_0, x]$$

Por el TVMI

Entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(c_x)$$

Observar que $c_x \longrightarrow x_0$ cuando $x \to x_0$

Luego, como f es continua y $c_x \xrightarrow[x \to x_0]{} x_0$

concluimos $\lim_{x \to x_0} f(c_x) = f(x_0)$

Entonces $F'(x_0) = f(x_0)$ $\blacksquare$

Recordamos la Regla de Barrow

(que dedujimos del TFC la clase pasada)

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua y

F una primitiva de f (es decir $F' = f$)

Entonces, si $a, b \in I$, se cumple

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)}$$

Veamos ejemplos de aplicación de la regla de Barrow

$$\int_2^5 3x^2 + 7 \, dx = \int_2^5 3x^2 \, dx + \int_2^5 7 \, dx$$

Para utilizar Barrow queremos calcular

primitivas de $3x^2$ y de 7.

$$(x^3)' = 3x^2 \longleftarrow$$ es decir x^3 es primitiva de $3x^2$

$$(7x)' = 7 \longleftarrow$$ $7x$ es primitiva de 7

entonces

$$\int_2^5 3x^2\,dx \underset{\text{Barrow}}{=} x^3\Big|_2^5 = 5^3 - 2^3 = 117$$

$$\int_2^5 7\,dx \underset{\text{Barrow}}{=} 7x\Big|_2^5 = 7.5 - 7.2 = 21$$

Entonces $\int_2^5 3x^2 + 7\,dx = 117 + 21 = 138$

SPOILER

Fórmula de integración por Partes

Notación:

$$\boxed{\int f \leftarrow \text{una primitiva de } f}$$

$$\int f' g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

$$\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{e^x} = \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{e^x} - \int \underset{f}{e^x} \cdot \underset{g'}{1} = x \cdot e^x - e^x$$

$$= e^x (x-1) + C$$

Verifiquemos:

$$\left(e^x \cdot (x-1) \right)' = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1 = e^x \cdot x$$