TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Def: Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ función.

Decimos que F es una primitiva (o anti-derivada) de f si $F' = f$.

Ejemplo:

- $\operatorname{sen}(x)$ es una primitiva de $\cos(x)$

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

- $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es una primitiva de x^n

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}x^n = x^n$$

Observación: La primitiva nunca es única

$$\text{Si } F' = f \Rightarrow (F + \underset{\text{constante}}{k})' = F' = f$$

En definitiva, si a una primitiva de f le sumamos una constante obtenemos otra primitiva

---

Proposición: Sea I un intervalo y

$f: I \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos además que F_1 y F_2 son primitivas de f. Entonces $F_1 - F_2 = k$ cte.

Dem: Supongamos que $F_1' = F_2' = f$

entonces $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$

Como $(F_1 - F_2)' = 0$, y I es un intervalo un int el Corolario de Lagrange implica que $F_1 - F_2 = k$ cte

$\boxed{\text{Corolario del TVML}}$

I intervalo

$f: I \to \mathbb{R}$ derivable

$f'(x) = 0 \ \forall x \in I$

$\Rightarrow f = $ cte

Regla de Barrow Sea I un intervalo, $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua y $F: I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f.

Entonces $$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad \forall a, b \in I$$

Aplicaciones de la regla de Barrow

Para calcular $\int_1^4 x^2\,dx$ usando la regla de Barrow, precisamos una primitiva de x^2.

$F(x) = x^3/3$ cumple $F'(x) = \left(x^3/3\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$

entonces F es una primitiva de x

Entonces por la regla de Barrow

$$\int_1^4 x^2\,dx = F(4) - F(1) = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

En general $$\boxed{\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$$

Notación: $$F\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

- De la misma manera, $n \geq 0$

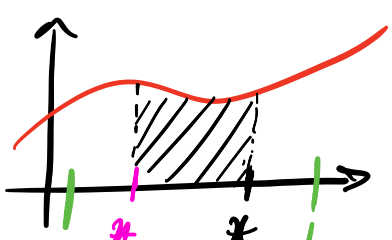
$$\int_a^b x^n\,dx \underset{\uparrow \text{ Barrow}}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{(n+1)}\,x^n = x^n$$

- $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \underset{\uparrow \text{ Barrow}}{=} -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = \big(-\cos(\pi)\big) - \big(-\cos(0)\big) =$$

$$\boxed{\big(-\cos(x)\big)' = \operatorname{sen}(x)}$$

$$= -(-1) - (-1) = 2$$



$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$a \quad x_0 \quad x \quad b$

Teorema fundamental del cálculo

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.
y $x_0 \in [a,b]$. Definimos $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$
Entonces F es una primitiva de f

$$\boxed{F(x) - F(x_0)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{=0} = \boxed{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Veamos como deducir la Regla de Barrow del Teorema Fundamental del cálculo.

tenemos $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y G primitiva de f
queremos ver que $\int_a^b f(t)\,dt = G\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.
Por el teorema fundamental del Cálculo, tenemos
que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f

Como dos primitivas distintas de f difieren en
una constante $\exists\, k \in \mathbb{R} \,/\, G = F + k$

una constante, $\exists\ k \in \mathbb{R}\ /\ G = F + k$

Entonces

$$G(b) - G(a) = (F + k)(b) - (F + k)(a) =$$

$$= (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

Ahora $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

Resumiendo $\boxed{G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt}$