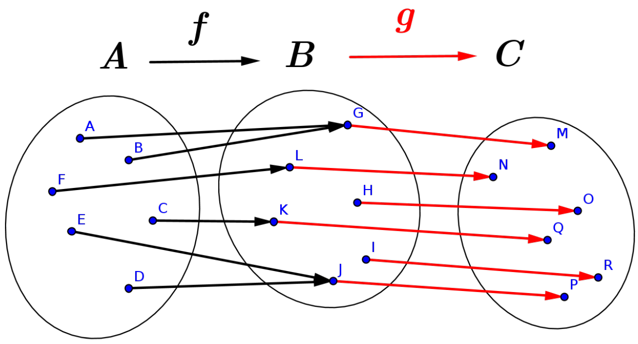
Soluciones Práctico 7: Comp. e Inv. de funciones

Ejercicio 1 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones dadas por el siguiente diagrama*



Calcular $g \circ f$
Solución:
$g \circ f$ está dada por:

$$(g \circ f)(A) = M; (g \circ f)(B) = M; (g \circ f)(C) = Q; (g \circ f)(D) = P; (g \circ f)(F) = N.$$

Ejercicio 2 (Composición de funciones) *Para los siguientes pares de funciones definidas en $\mathbb{R}$ calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.*

1. a) $f(x) = 2x + 1,$ $\qquad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
   Solución:
   - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^3 - (2x+1)^2 - 4 = 8x^3 + 8x^2 + 2x - 4.$
   - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^3 - x^2 - 4) + 1 = 2x^3 - 2x^2 - 7.$

   b) $f(x) = x^2 + x + 4,$ $\qquad g(x) = \cos(x)$
   Solución:
   - $(g \circ f)(x) = \cos(x^2 + x + 4).$
   - $(f \circ g)(x) = \cos^2(x) + \cos(x) + 4.$

   c) $f(x) = x^3,$ $\qquad g(x) = \frac{x}{x^4+5}$
   Solución:
   - $(g \circ f)(x) = \frac{x^3}{x^{12}+5}.$
   - $(f \circ g)(x) = \left(\frac{x}{x^4+5}\right)^3.$

2. a) $f(x) = |x+1|,$ $\qquad g(x) = |2x|$
   Solución:
   - $(g \circ f)(x) = 2|x+1|$
   - $(f \circ g)(x) = |2x| + 1$

   b) $f(x) = x + 1,$ $\qquad g(x) = \text{máx}\{1, x-1\}$
   Solución:
   - $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 1 \\ x & si\ x \geq 1 \end{cases}$
   - $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 2 \\ x & si\ x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leq 0 \\ x-8 & 0 < x \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases}$

Solución:

- $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 6x^2+2 & x \leq 0 \\ x-8 & 0 < x \leq 8 \\ 2x-16 & x > 8 \end{cases}$
- $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \leq 0 \\ 2x-8 & 0 < x \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x \leq 0 \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} -x^2 & si \quad x < 2 \\ x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Solución:

- $(g \circ f)(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$
- $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$

Ejercicio 3 (Composición de funciones y dominio) *Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. En caso de que no esté bien definida la composición modificar los dominios para que resulte bien definida.*

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x+1$.

   Solución:

   - $g \circ f$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = 2\frac{x}{x^2-9} + 1 = \frac{x^2+2x-9}{x^2-9}$
   - $f \circ g$ *no está bien definida ya que* 3 *y* -3 *pertenecen a la imagen de* g.
     Por lo que si modificamos el dominio de g *a* $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ *queda bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{(2x+1)^2-9} = \frac{2x+1}{4x^2+4x-8}$

2. $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = \log(x)$ *y* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = 2x-1$.

   Solución:

   - $g \circ f$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = 2\log(x) - 1$
   - $f \circ g$ *no está bien definida ya que* $(-\infty, 0]$ *está incluida en la imagen de* g.
     Por lo que si modificamos el dominio de g *a* $(1/2, +\infty)$ *queda bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \log(2x-1)$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = |x|$ *y* $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $g(x) = \sqrt{x^2-1}$.

   Solución:

   - $g \circ f$ *no está bien definida ya que* $[0, 1)$ *está incluida en la imagen de* f.
     Por lo que si modificamos el dominio de f *a* $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$ *está bien definida y está dada por* $(g \circ f)(x) = \sqrt{|x|^2-1} = \sqrt{x^2-1}$.
   - $f \circ g$ *está bien definida y está dada por* $(f \circ g)(x) = \left|\sqrt{x^2-1}\right| = \sqrt{x^2-1}$.

Ejercicio 4 *Para las funciones* f, g *y* $g \circ f$, *del Ejercicio* **??** *determinar cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.*

1. *f es sobreyectiva pero no inyectiva, g es biyectiva y $g \circ f$ no es inyectiva pero si sobreyectiva.*

2. *f y g son biyectivas, también $g \circ f$*

3. *f no es sobreyectiva ni inyectiva, g tampoco es sobreyectiva pero si inyectiva. La función $g \circ f$ no es inyectiva ni sobreyectiva.*

Ejercicio 5 (Dominio, codominio y biyectividad) *Consideremos las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $g(x) = x^2$.
3. $h : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ *tal que* $h(x) = x^2$.
4. $i : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *tal que* $i(x) = x^2$.

a) *¿Son todas las funciones iguales? Justifique.*

Solución: *No hay dos funciones iguales. Para que las funciones sean iguales, entre otras cosas, deben coincidir los dominios y codominios. En este caso, la "asociación" es siempre la misma: $x \rightsquigarrow x^2$, pero no hay dos funciones que coincidan en dominio y codominio.*

b) *Estudiar inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.*

Solución: *La primera función (f) no es inyectiva (por ejemplo x=1 y x=-1 tienen la misma imagen) ni sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

La segunda función (g) no es inyectiva pero sí sobreyectiva. En este codominio reducido (con respecto a la anterior) todos los elementos tiene preimágenes, es decir, una raíz cuadrada.

La tercer función (h) es inyectiva (dos números ***postivos*** *diferentes tienen cuadrados diferentes) pero no sobreyectiva (por ejemplo y=-2 no tiene preimagen).*

La cuarta función (i) es biyectiva (es decir, inyectiva y sobreyectiva). El argumento de inyectividad es el mismo que el de h (tienen el mismo dominio) y el argumento para la sobreyectividad es el mismo que para g.

Ejercicio 6 (Dominio, codominio y biyectividad) *Determinar para las siguientes funciones $f : A \to B$ cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = x + 5$
2. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 5$
3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$
5. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$
6. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

Solución:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{2\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva. Además para cualquier $x \in \mathbb{Z}$, $x - 5$ también es un entero y $x = f(x - 5)$. Por lo tanto es sobreyectiva.*

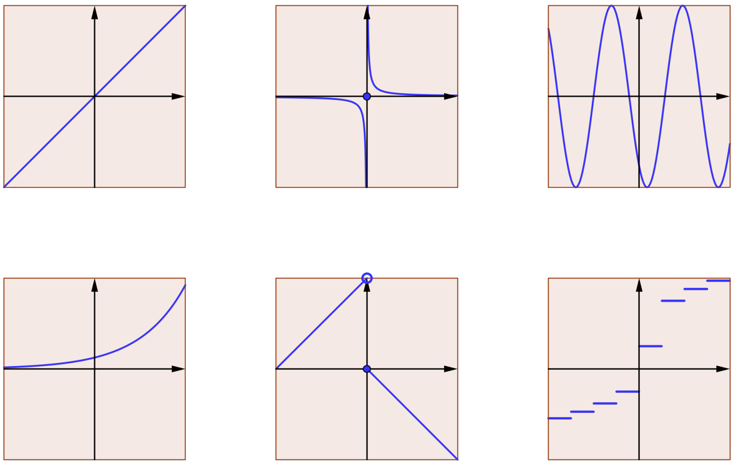
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 5$ *es inyectiva y sobreyectiva.*

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

5. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Sin embargo, la preimagen de $\{9\}$ por ejemplo, es vacía. Por lo tanto no es sobreyectiva.*

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$ *es inyectiva. Además para cualqueir* $x \in \mathbb{R}$, $x/2$ *también es un real y* $x = f(x/2)$. *Por lo tanto es sobreyectiva.*

Ejercicio 7 (Biyectividad - Interpretación gráfica) *Determinar para los siguientes bosquejos de funciones cuáles son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas:*



Solución: *Tomamos las seis funciones como definidas* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *y es según esto que discutimos la inyectividad y la sobreyectividad.*

- *Arriba a la izquierda: Biyectiva*
- *Arriba al centro: Biyectiva*
- *Arriba a la derecha: No es inyectiva. Además la imagen es un intervalo acotado, por lo tanto tampoco es sobreyectiva en* $\mathbb{R}$.
- *Abajo a la izquierda: Es inyectiva pero no sobreyectiva.*
- *Abajo al centro: Habría que ver como sigue la función hacia la izquierda, pero en el intervalo donde está representada, la función es biyectiva.*
- *Abajo a la derecha: Ni inyectiva ni sobreyectiva.*

Ejercicio 8 (Inyectividad/ Sobreyectividad y Composición) *Sean* $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *dos funciones.*

1. *Pruebe que si* f *y* g *son inyectivas entonces también lo es* $g \circ f$.

   Solución:

   Supongamos que f *y* g *son inyectivas. Queremos demostrar que* $g \circ f$ *es inyectiva, es decir, queremos demostrar que para todos los* $x, x' \in X$, *si* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ *entonces* $x = x'$.

   Para ello, dados $x, x' \in X$ *cualesquiera, supongamos que* $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. *Tenemos que* $g(f(x)) = g(f(x'))$ *por defición de* $g \circ f$.

   Como g *es inyectiva, se deduce que* $f(x) = f(x')$. *Y como* f *es inyectiva, se concluye que* $x = x'$.

2. *Pruebe que si f y g son sobreyectivas entonces también lo es $g \circ f$.*

   Solución:

   Supongamos que f y g son sobreyectivas. Queremos demostrar que $g \circ f$ es sobreyectiva, es decir, queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$.

   Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera.

   Como g es sobreyectiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Y como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Se concluye que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

3. a) *Enuncie el recíproco de 1.*
   Solución:
   El reciproco de 1 es "Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f y g lo son".

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*
   Solución:
   El recíproco de 1 es falso, ya que si tomamos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^2$, se tiene que $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $(g \circ f)(x) = (e^x)^2$ es inyectiva, mientras que g no lo es.

   Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
   Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Queremos demostrar que f es inyectiva, es decir: queremos demostrar que para todos $x, x' \in X$, si $f(x) = f(x')$, entonces $x = x'$. Para ello, dados $x, x' \in X$ cualesquiera, supongamos que $f(x) = f(x')$. Aplicando g en ambos lados, obtenemos que $g(f(x)) = g(f(x'))$, es decir: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Y como $g \circ f$ es inyectiva, se concluye que $x = x'$.

4. a) *Enuncie el recíproco de 2.*
   Solución:
   El reciproco de 2 es "Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces f y g lo son".

   b) *¿Es verdadero el enunciado anterior? Discutir en detalle.*
   Solución:
   El recíproco de 2 es falso, ya que si tomamos $f, g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definidas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = (x-1)^2$, se tiene que $g \circ f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $(g \circ f)(x) = (x + 1 - 1)^2 = x^2$ es sobreyectiva, mientras que f no lo es.

   Sin embargo, se puede demostrar que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g tambien lo es.
   Prueba: Supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Queremos demostrar que g es sobreyectiva, es decir: queremos demostrar que para todo $z \in Z$, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Para ello, consideremos $z \in Z$ cualquiera. Como $g \circ f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Tomemos $y := f(x) \in Y$. Se concluye que $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$.

Ejercicio 9 (Inyectividad y crecimiento) *¿Verdadero o falso?*

1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. decreciente) entonces f es inyectiva (si es verdadero pruébelo, si es falso dé contraejemplo).*

   Solución: *Verdadero.*
   Probémoslo para f decreciente, para f creciente la prueba es análoga: Si $x \neq y$ entonces se da $x < y$ o $x > y$. En el primer caso, como f es estrictamente decreciente se tiene $f(x) > f(y)$, si es el segundo caso entonces por la misma razón se tiene $f(x) < f(y)$. En cualquiera de los casos $f(x) \neq f(y)$ cuando $x \neq y$ y esto es la definición de función inyectiva.

2. *Si f es inyectiva, ¿debe ser estrictamente creciente?*

   Solución: *Falso.*
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -x$ *es estrictamente decreciente e inyectiva.*

3. *La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + x$ es biyectiva.*

   Solución: *Verdadero.*
   Por la parte 1 alcanza verificar que f es estrictamente creciente. Si $x < y$, entonces $x^3 < y^3$ y por lo tanto $x^3 + x < y^3 + y$.