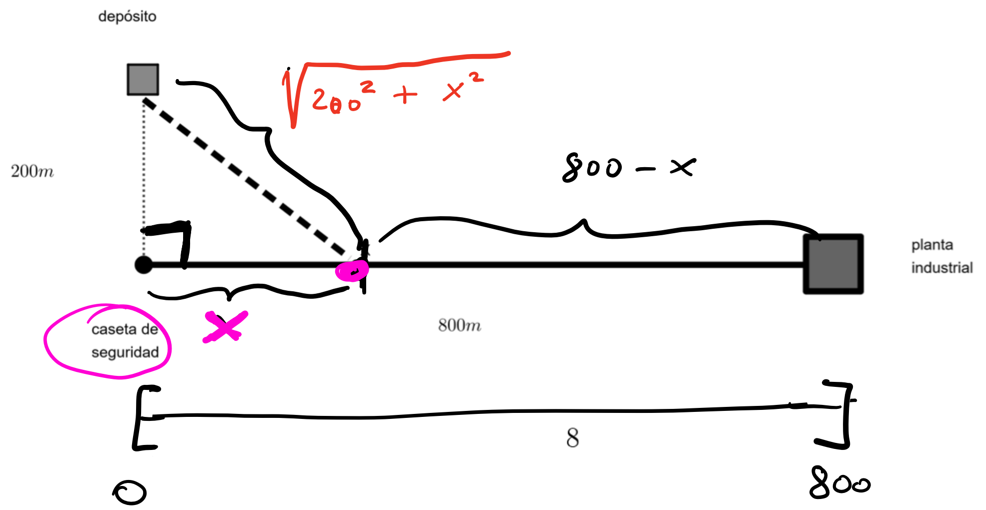
Ejercicio 8



La empresa VIDC S.A. tiene sus instalaciones en un predio rural en Cerro Largo. Dentro de éste, la planta industrial se encuentra al final de un camino de tierra, a $800m$ de la caseta de seguridad, como se muestra en la figura. A $200m$ de este camino, justo frente a la caseta de seguridad se ha construido un nuevo depósito. Los camiones que llevan la producción de la planta al depósito deben circular, debido a su peso, por camino asfaltado. Por este motivo se va a asfaltar el camino de tierra desde la planta hasta el punto X, y de ahí se va a construir un camino asfaltado que va directo al depósito. Construir un tramo del nuevo camino cuesta el triple que asfaltar un tramo del camino existente de igual longitud. ¿A qué distancia debe estar X de la planta, si se quiere minimizar el costo de la obra?

α costo por metro de solamente asfaltar

3α costo por metro de construir camino desde 0

Costo del tramo a asfaltar:

$$(800 - x)\alpha$$

Costo del tramo a contruir desde 0:

$$\left(\sqrt{200^2 + x^2}\right)3\alpha$$

$C : [0, 800] \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

$C(x) = \alpha(800 - x) + 3\alpha\left(\sqrt{200^2 + x^2}\right)$

$\left((200^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(200^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$C'(x) = -\alpha + 3\alpha\left(x(200^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right) =$

$= -\alpha + \frac{3\alpha \cdot x}{\sqrt{(200^2+x^2)}} = \alpha\left(-1 + \frac{3x}{\sqrt{200^2+x^2}}\right)$

$C'(x) = 0 \iff \left(-1 + \frac{3x}{\sqrt{200^2+x^2}}\right) = 0$

$\frac{3x}{\sqrt{200^2+x^2}} = 1 \iff 3x = \sqrt{200^2+x^2} \Rightarrow$

$9x^2 = 200^2 + x^2 \Rightarrow 8x^2 = 200^2$

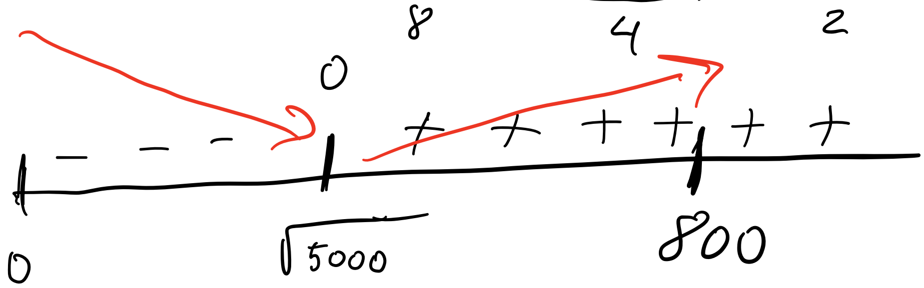
$x^2 = \frac{20\times10\times20\times10}{2\times2\times2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{200^2}{8}} = \sqrt{5000} \simeq 70{,}7$

$200 = 50\times4$

$\frac{200^2}{8} = \frac{50\times4}{4}\times\frac{50\times4}{2} = 50\times100 = 5000$

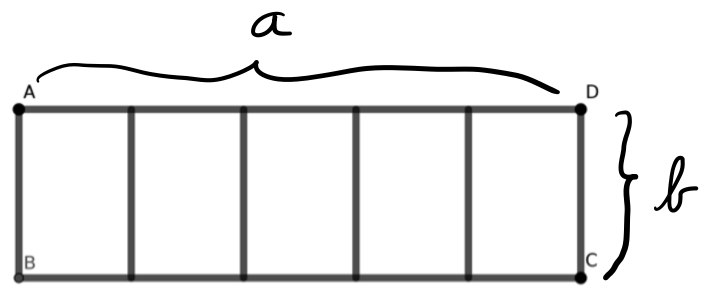
sg $C'(x)$



Entonces el mínimo de C en el intervalo $[0,800]$ se presenta en $x = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2}$

Ejercicio 11

Queremos construir cinco corrales idénticos, de acuerdo al plano que muestra la figura. Para eso, haremos una cerca de alambre, que incluye el perímetro total (o sea el rectángulo *ABCD*) así como las separaciones entre corrales adyacentes. En otras palabras, la cerca incluye todas la líneas negras en la figura. Queremos que el área total de los cinco corrales sea de $900m^2$. Si queremos minimizar la longitud de la cerca, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo *ABCD*?



Área de ABCD $= 900\text{m}^2$

Longitud de la cerca es $2a + 6b$

Por otro lado, $a.b = 900 \Rightarrow b = \frac{900}{a}$

Sustituímos: longitud de la cerca, en función de a es $2a + 6\left(\frac{900}{a}\right)$

Entonces tenemos que minimizar

$L : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$L(a) = 2a + \frac{6.900}{a}$

$L'(a) = 2 + 6.(900)\left(\frac{-1}{a^2}\right)$

$L'(a) = 0 \iff 2 - \frac{6(900)}{a^2} = 0$

$\iff 2 = \frac{6.900}{a^2}$

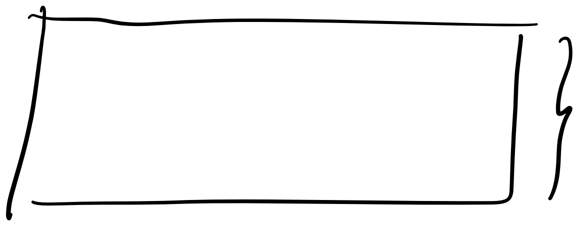
$\iff a^2 = \frac{6.900}{2} = 3 \times 900 = 2700$

$\iff a = \pm 30\sqrt{3}$

$sg\ L'(a)$: 0 $\;- \; - \; - \; - \; - \;$ $\overset{0}{30\sqrt{3}}$ $\;+ \; + \; + \; + \; + \; + \; + \; +\;$ $+\infty$

$L'(1) = 2 + \frac{6.(900)}{-1} = < 0$

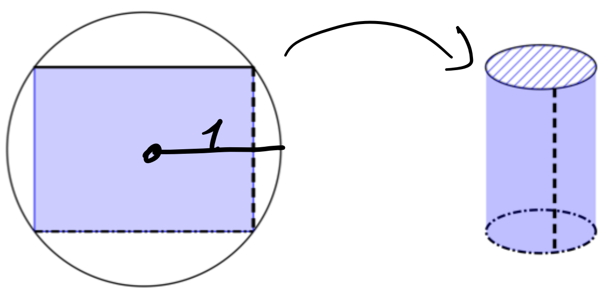
El rectángulo debe tener dimensiones:



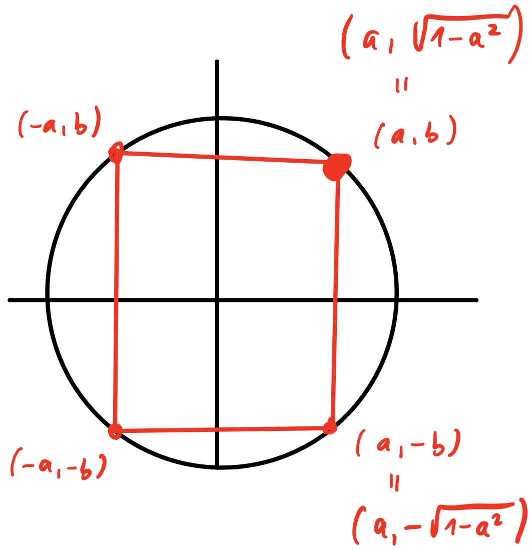
$b = \frac{900}{30.\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.10$

$a = 30\sqrt{3}$

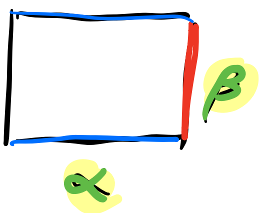
2. Se tiene una lámina metalica circular de 1 metro de radio. Se desea construir un tubo (cilindro sin tapas) tomando como lado lateral de dicho cilindro un rectangulo inscripto en el círculo.

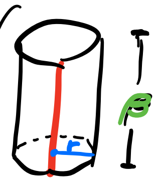


El mayor volumen que puede tener dicho tubo es:



$$a^2+b^2=1$$
$$b^2=1-a^2$$
$$\boxed{b=\pm\sqrt{1-a^2}}$$



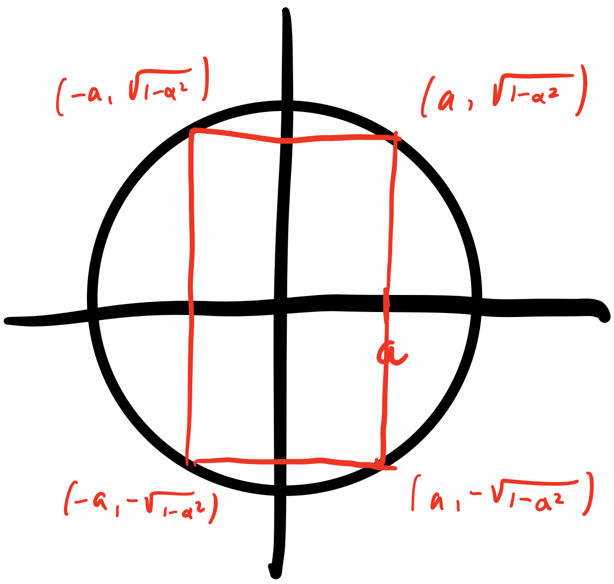
$\rightsquigarrow \mathrm{vol}\Bigg($ 

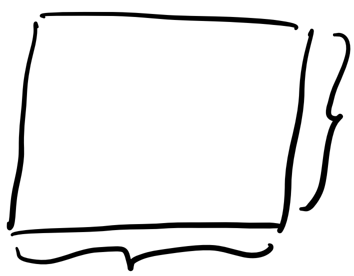
$\Bigg) = r^2 \cdot \pi \beta$

$$2 \cdot r \pi = \alpha$$
$$r = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ sustituyendo r

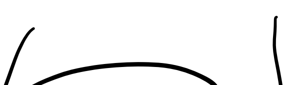
$$\boxed{\mathrm{vol} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \pi \cdot \beta}$$

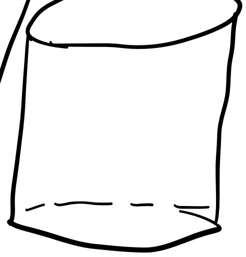


$\rightsquigarrow$ 

$\underbrace{2\sqrt{1-a^2}}_{\shortparallel \atop \beta}$

$\underbrace{2a}_{\shortparallel \atop \alpha}$



Vol () $= \left(\frac{2a}{2\pi}\right)^2 \pi \cdot 2\sqrt{1-a^2}$

$V : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$V(a) = 2\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \pi \sqrt{1-a^2} = \frac{2}{\pi} a^2 \sqrt{1-a^2}$$

Hallar el máximo de V