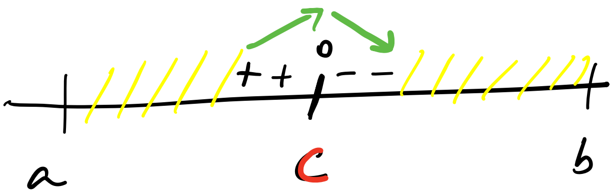
CLASIFICACIÓN DE EXTREMOS

USANDO EL SIGNO DE LA DERIVADA.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable



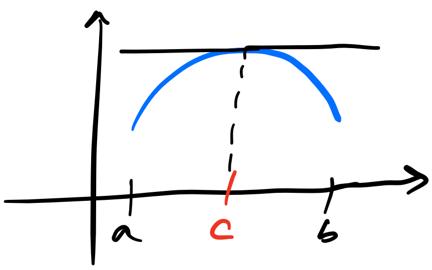
$c \in (a,b)$

Si $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$

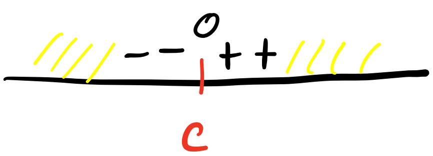
y $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, f'(x) > 0 \quad \forall x \in (c-\varepsilon, c)$

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (c, c+\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ f presenta un máximo relativo en c



Análogamente:

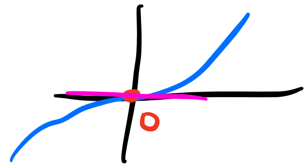
sg f' 

$\Longrightarrow$ f presenta un mínimo relativo en c

Terminología: f presenta un punto crítico en c si $f'(c) = 0$

Observación: Podemos tener un punto crítico donde no se presenta un extremo relativo

ej: $f(x)=x^3$; $f'(x)=3x^2 \Rightarrow f$ presenta un punto crítico en 0. Sin embargo f no presenta un extremo relativo en 0

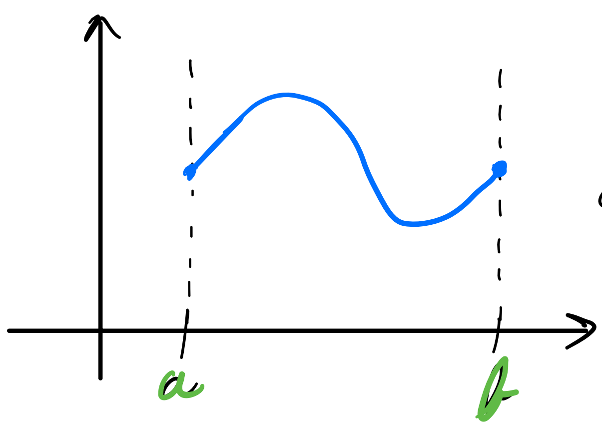


También podríamos ver que f no presenta extremo en 0 estudiando el signo de la derivada

$sg\ f' = sg(3x^2)$ $\quad$ + + + 0 + + + (0)

Extremos relativos en los bordes del dominio

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$



En $x=a$ como la derivada lateral en a es positiva concluímos que f presenta un mínimo relativo en a;

y como la derivada en b es positiva concluímos que f presenta un máximo relativo en b.

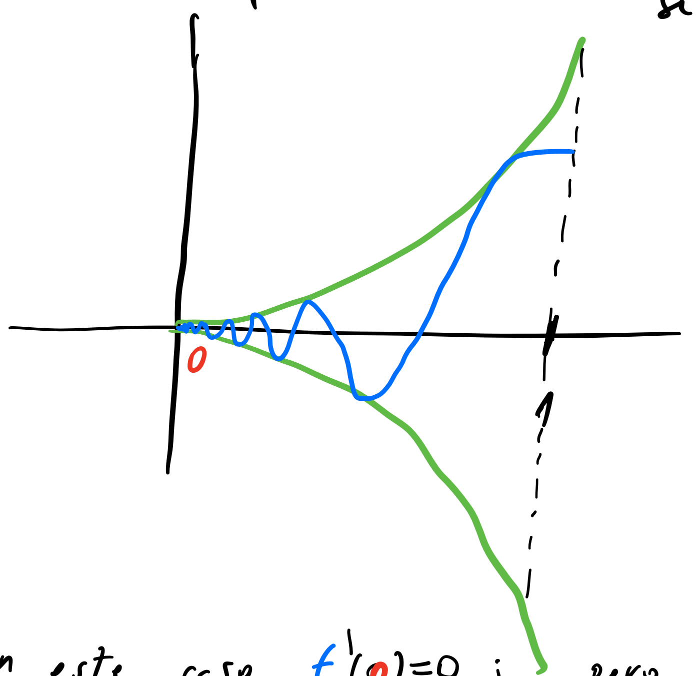
PARA LOS PUNTOS DEL BORDE DERIVADA DISTINTA DE CERO ASEGURA EXTREMO RELATIVO, MIENTRAS QUE PARA PUNTOS INTERIORES AL INTERVALO, DERIVADA DISTINTA DE CERO ASEGURA QUE NO HAY UN EXTREMO RELATIVO EN ESTE PUNTO

ESE PUNTO

<u>OBSERVACIÓN</u>: Si $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ y tenemos un punto crítico en a, es decir $f'(a)=0$; no podemos asegurar que hay un extremor relativo en a.

<u>Ej</u>: $f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$



En este caso $f'(0)=0$; pero f no presenta un extremo relativo en 0

<u>Def</u>: La derivada segunda de f es la derivada de f'

Decimos que f es dos veces derivable si f' es derivable.

EL CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

<u>Proposición</u>: Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ / f presenta un punto crítico en $c\in(a,b)$. Si

además f es dos veces derivable, entonces:

- si $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en c
- si $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en c

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

Entonces f presenta puntos críticos en $x = 3$ y $x = -1$

Podríamos clasificar los puntos críticos estudiando el signo de f' como antes, pero vamos a hacerlo con la derivada segunda.

Para clasificar el punto crítico

$x = 3$, calculamos $f''(3) = 12 > 0$

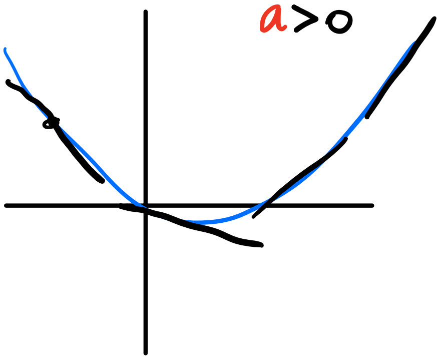
$\Rightarrow f$ presenta un mínimo relativo en 3

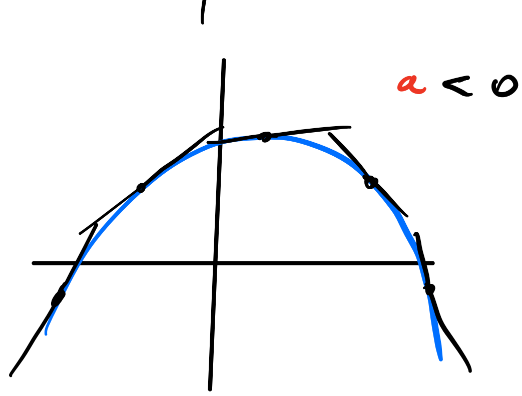
$x = -1$, calculamos $f''(-1) = -12 < 0$

$\Rightarrow f$ presenta un máximo relativo en -1.

LA CONCAVIDAD

El estudio de la concavidad es el estudio del signo de la derivada segunda; o más generalmente: el estudio del crecimiento de la derivada primera.





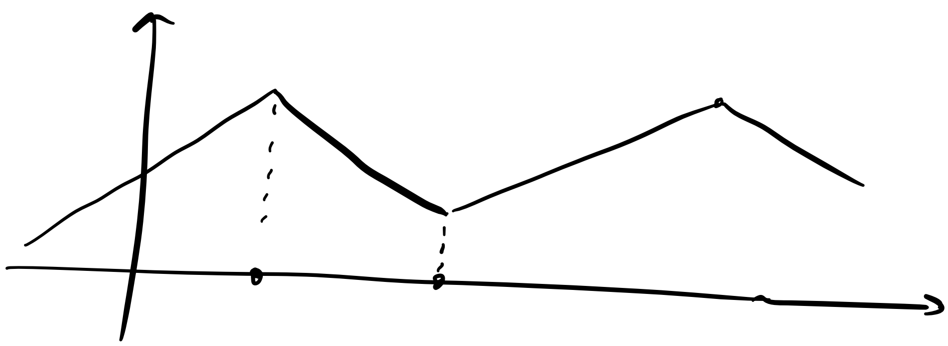
$$f(x) = a x^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a$$

A LA HORA DE ESBOZAR EL GRÁFICO

PODEMOS USAR LA DERIVADA SEGUNDA PARA HACER ESBOZOS MÁS REALISTAS

Información

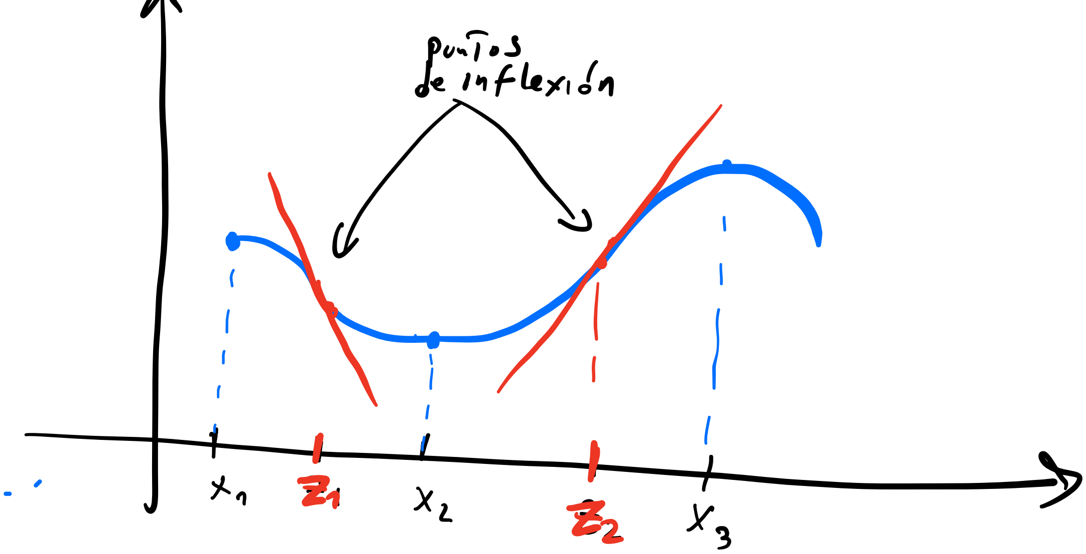
sg f' + (imágenes de puntos críticos)



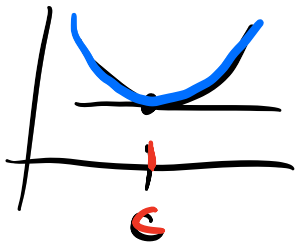
Si agregamos info del signo de f''

sg f'' $\quad - \; - \; - \; 0 \; + \; + \; + \; + \; + \; 0 \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

$x_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad z_2 \quad x_3$



$f'(c)=0 \quad f''(c)>0$



$f'(c)=0 \quad f''(c)<0$