Práctico 6

1. La ecuación de ondas que modela la evolución de la temperatura u de una barra delgada de longitud L para la cual la transferencia de calor con el ambiente solo se da en los bordes es la siguiente:

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$$

Siendo t la variable temporal y $x \in [0, L]$ posición de la barra (modelada de forma unidimensional). Buscamos soluciones de clase C^2 en el dominio $(0, +\infty) \times (0, L)$ y continuas en la clausura de este dominio.

   a) Por el método de variables separables hallar solución a la ecuación de ondas con las siguientes condiciones de borde

$$\begin{cases} u(x,0) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{L}x) & x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, \infty) \end{cases}$$

   b) Probar que si u y $\overline{u}$ son soluciones de la ecuación de calor con

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, \infty) \end{cases}$$

   Entonces la suma $u + \overline{u}$ también lo es.

   c) Para $k > 0$ natural fijo hallar soluciones con las siguientes condiciones de borde

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{i=0}^{k} b_i \operatorname{sen}(\frac{n_i \pi}{L}x) & x \in [0, L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, \infty) \end{cases}$$

2. Consideramos la ecuación de ondas:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$$

   a) Utilizando el método de separación de variables hallar solución con las sig. condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(x,0) = 2\operatorname{sen}(3x) & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

   b) Probar que la función $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x(x-\pi)$ no se puede escribir como suma finita de funciones de la forma $s_n(x) = b_n \operatorname{sen}(nx)$ con n natural.

   c) Asumiendo la siguiente igualdad:

$$v_0(x) = x(x-\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \operatorname{sen}(kx)$$

   Hallar candidato a solución con las sig. condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ u_t(x,0) = x(x-\pi) & x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

3. *a*) Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son las que corresponden a situaciones en las que el perfil de temperaturas no se modifica con el tiempo (lo que equivale a decir que $u(x,t)$ no depende de t, y por lo tanto $u_t = 0$). A esa soluciones las llamaremos *soluciones estacionarias* del problema.

   Hallar la solución estacionaria a la ecuación de calor, $u_e(x)$, para el problema con datos de contorno

$$u(0,t) = A, \qquad u(L,t) = B$$

   b) Hallar la solución de la ecuación del calor en $(0,1) \times (0,\infty)$ con condiciones de borde

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1$$

   y dato inicial

$$u_0(x) = sen(\pi x) + x$$

   Sugerencia: utlizar principio de superposición de soluciones

   c) Hallar candidata a solución de la ecuación del calor en $(0,1) \times (0,\infty)$ con condiciones de borde

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1$$

   y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   Sugerencia: considerar la siguiente igualdad:

$$u_0(x) - x = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}((2k+1)\pi x)$$

4. Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = x \operatorname{sen} t, \quad (x,t) \in D = (0,\pi) \times \mathbb{R}.$$

   a) Hallar una solución particular $u_0(x,t)$ de la forma $f(x)\operatorname{sen} t + g(x)$ tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = -1$ y $g'(0) = -1$.

   b) Hallar la función u que sea candidata a solución de la ecuación en D y satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}, \ x \in [0,\pi]$$

$$u_t(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \ x \in [0,\pi]$$

$$u(0,t) = 0, \ t \in \mathbb{R}$$

$$u(\pi,t) = -\pi \sin t - \pi, \ t \in \mathbb{R}.$$

5. Se considera la ecuación:

$$(*)\begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

Buscando soluciones de la forma $X(x)T(t)$ hallar una candidata a solución de $(*)$ de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Observación: Si $u_n(x,t) = X(x)T(t)$, la condición $u_x(0,t) = 0$ implica $X^{'}(0) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$ implica $X^{'}(\pi) = 0$.

6. Utilizar el método de las series de Fourier para resolver la ecuación

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$$

con las condiciones de borde:

a) $u(0,y) = u(\pi,y) = \sin y$, $u(x,\pi) = u(x,0) = 0$,

b) $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi)$,

c) $u(0,y) = u(\pi,y) = \sin y$, $u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi)$.

7. En este ejercicio consideramos el problema de la cuerda vibrante de longitud 1 con sus extremos fijos cuyas vibraciones están amortiguadas. Sea $\Omega = (0,1) \times (0,+\infty)$. La descripción de este problema conduce a buscar una función $u = u(x,t)$ definida sobre el conjunto $\bar{\Omega}$ que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - u_t(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1] \\ u_t(x,0) = v_0(x), & x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,+\infty), \end{cases}$$

donde u_0 y v_0 son dos funciones prefijadas que contienen la información sobre el estado de la cuerda en el instante inicial, y que satisfacen

$$u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0.$$

El término $-u_t$ en el miembro de la derecha de la ecuación es el responsable del amortiguamiento.

Buscar un candidato a solución de la ecuación usando el método de las series de Fourier.