Estimación Puntual
Práctico 9

Consistencia de un estimador

Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid con distribución F_θ donde θ es un parámetro. Se considera la familia $\{T_n(X_1,\dots,X_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde T_n es una función de los n datos (que cumple ciertas hipótesis). $T_n(X_1,\dots,X_n)$ se llama un estimador de θ. Un estimador se dice *consistente* si $T_n(X_1,\dots,X_n) \xrightarrow{c.s.} \theta$.

Ejercicio 1 : Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid tales que $\mathsf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathsf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ $(\sigma > 0)$.

1. Demostrar que $\overline{X}_n$ es un estimador consistente de μ, esto es que $\overline{X}_n \xrightarrow{c.s.} \mu$.
2. Demostrar que si $\sigma_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ y $s_n^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ entonces

$$\sigma_n^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma^2 \qquad s_n^2 \xrightarrow{c.s.} \sigma^2 \qquad \sigma_n \xrightarrow{c.s.} \sigma \qquad s_n \xrightarrow{c.s.} \sigma$$

   Sugerencia: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i)^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2$ y usar los siguientes resultados:

   Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n) \xrightarrow{c.s.} g(X)$

   Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $Y_n \xrightarrow{c.s.} Y$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{c.s.} g(X, Y)$

Estimación por el Método de los Momentos

Ejercicio 2 : Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $\sim F$ Encontrar estimadores para los siguientes parámetros por el método de los momentos:

1. p si la distribución es Ber(p) .
2. λ si la distribución es $\mathcal{P}(\lambda)$.
3. p si la distribución es Geo(p).
4. μ y σ^2 si la distribución es $N(\mu, \sigma^2)$.
5. a y b si la distribución es $\mathcal{U}[a, b]$.
6. b si la distribución es absolutamente continua con densidad $f_X(x) = 2x/b^2$ si $0 < x < b$ y 0 sino.[1]

Ejercicio 3 : Una pieza de una máquina se verifica al final de cada hora de producción y se cambia por una nueva en caso de encontrarse rota. El tiempo de vida en horas de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $T \sim \exp(\lambda)$, o sea, con distribución exponencial de parámetro λ. Por lo tanto, el tiempo en horas que transcurre hasta el recambio de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $X = [T] + 1$, donde $[T]$ es la parte entera de T, esto es, $X = n$ si y sólo si $n - 1 \leq T < n$.

1. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X y probar que $X \sim$ Geo$(1 - e^{-\lambda})$ o sea que X tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-\lambda}$.
2. Se desea estimar el parámetro λ del tiempo de vida de dichas piezas.

[1] Examen de julio de 2024.

(a) Calcular λ en función de μ siendo $\mu = \mathsf{E}(X)$.

(b) ¿Cómo estimaría μ a partir de las observaciones $X_1, \dots, X_n$ de los tiempos de recambio?

(c) Construir un estimador consistente para λ en función de las observaciones $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Ejercicio 4 :

Sea una sucesión de variables aletorias $X_1, X_2, \dots$ iid tal que $P\{X_1 = 1\} = P\{X_1 = -1\} = a$ y $P\{X_1 = 0\} = 1 - 2a$ donde $0 < a < 1/2$. Dar por el método de los momentos un estimador consistente del parámetro a.

Ejercicio 5 : Encontrar los estimadores de **máxima verosimilitud** para los siguientes parámetros y distribuciones del Ejercicio 2 y compararlos con los respectivos estimadores por el método de los momentos obtenidos en dicho ejercicio.

Definición: Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ iid con distribución F_θ. Se define el **sesgo** de un estimador de θ, $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ como $\mathsf{E}(T_n - \theta)$. Un estimador T_n se dice **insesgado** si su sesgo es cero, es decir $\mathsf{E}(T_n) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Decimos que es **asintóticamente insesgado** si $\mathsf{E}(T_n - \theta) \underset{n}{\rightarrow} 0$. El **error cuadrático medio**, que se define como $ECM(T_n) = \mathsf{E}\left((T_n - \theta)^2\right)$.

Ejercicio 6 : Demostrar que si el estimador T_n tiene sesgo a_n entonces $ECM(T_n) = \mathsf{Var}(T_n) + a_n^2$.

Ejercicio 7 : Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid tales que $\mathsf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathsf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Mostrar que $\overline{X}_n$ es insesgado como estimador de μ, que σ_n^2 no es insesgado como estimador de σ^2, pero s_n^2 sí lo es.

Ejercicio 8 : Se considera una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid con media $\mathsf{E}(X) = \mu$ y varianza $\mathsf{Var}(X) = \sigma^2$. Se considera el estimador "lineal" $\widehat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ (una combinación lineal de las observaciones).

1. ¿Qué relación tienen que cumplir los coeficientes a_i para que $\widehat{\mu}$ sea un estimador insesgado de μ?
2. Entre todos los estimadores lineales e insesgados de la media μ hallar el de varianza mínima.

   Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 9 : Sean $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{P}(\lambda)$. Demostrar que tanto los estimadores de λ obtenidos en los Ejercicio 2 y Ejercicio 5 así como s_n^2, son estimadores insesgados de λ.

Ejercicio 10 : Sean $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{U}[0, \theta]$. Estudiar su sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador de θ obtenido por el método de los momentos y el de máxima verosimilitud.

Ejercicio 11 (Examen de julio de 2024): Sean $X_1, \dots, X_n$ iid con distribución absolutamente continua con densidad $f_X(x) = 3x^2/a^3$ si $0 < x < a$ y 0 sino. Estudiar su sesgo y el error cuadrático del estimador de a dado por $\hat{a} = 4\bar{X}_n/3$.