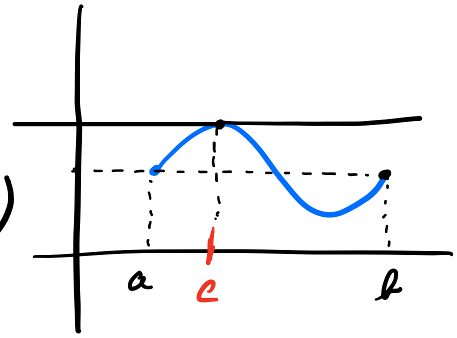
Teorema de Rolle

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sea continua, y derivable en (a,b)



Supongamos además que $f(a)=f(b)$.

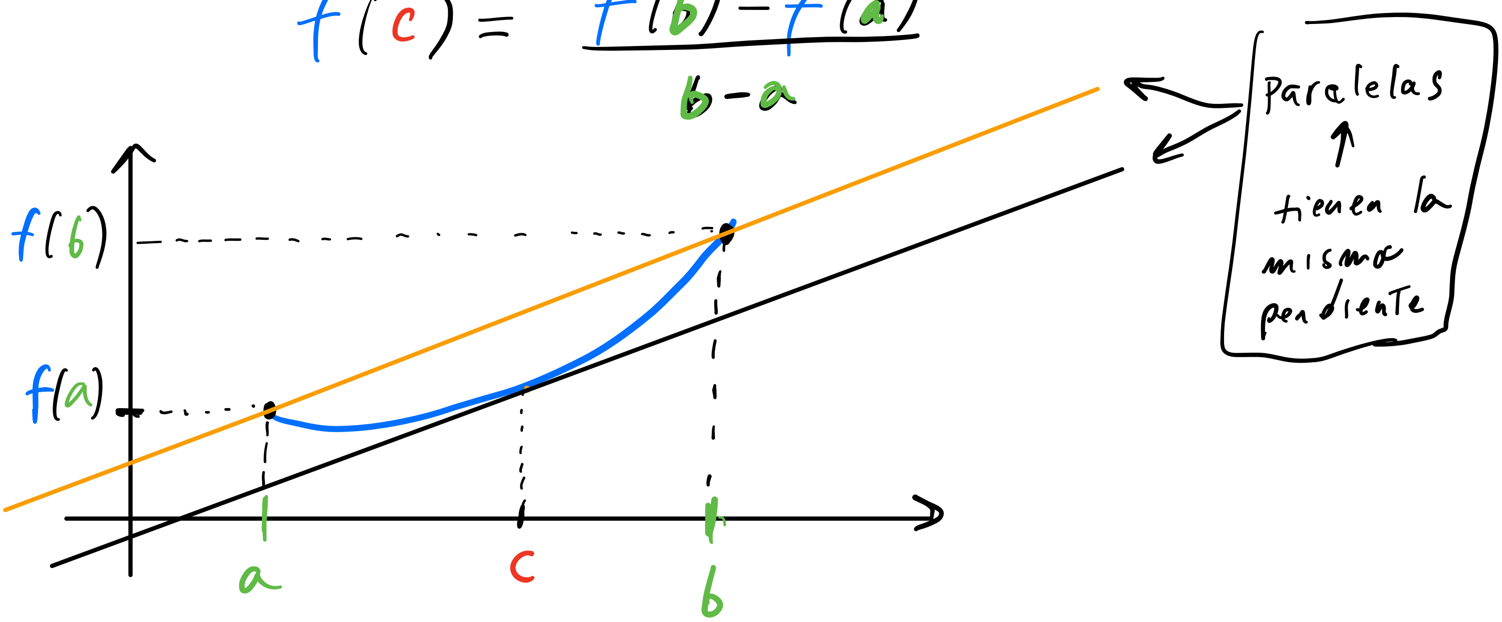
Entonces, $\exists c\in(a,b)\ /\ f'(c)=0$.

Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sea continua, y derivable en (a,b).

Entonces, $\exists c\in(a,b)\ /$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Consecuencias:

El Teorema de Rolle se puede deducir del Teo Lagrange

Porque si $f(a)=f(b)$, Lagrange dice que:

$$\boxed{\exists\, c\in(a,b) \;/\; f'(c) = \frac{\overset{=0}{f(b)-f(a)}}{b-a} = 0}$$

TESIS DE ROLLE

Aplicación del Teorema de Lagrange al estudio del crecimiento de funciones

Supongamos que $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable que cumple $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a,b)$

$\Longrightarrow f$ es estrictamente creciente

(**Recordamos**: f es estrictamente creciente si $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$


)

Tomemos $x_1, x_2 \in (a,b)$ con $x_1 < x_2$

queremos ver que $f(x_1)<f(x_2)$.

Por el Teorema de Lagrange, $\exists\, c\in(x_1,x_2) \;/$

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Por hipótesis $f'(c)>0$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

Entonces $f(x_2)-f(x_1)$ y (x_2-x_1) tienen el mismo signo.

Entonces, si $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow$

$$f(x_2)-f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Esto prueba que f es estrictamente creciente.

<u>Ejercicio</u>: Repetir la prueba para probar que si $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow f$ es estrictamente decreciente.

<u>Ejemplo</u>: Estudiar el crecimiento de

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x+1)(x-1)$$

sg f' $+++$ 0 $---$ $++++$

-1 1

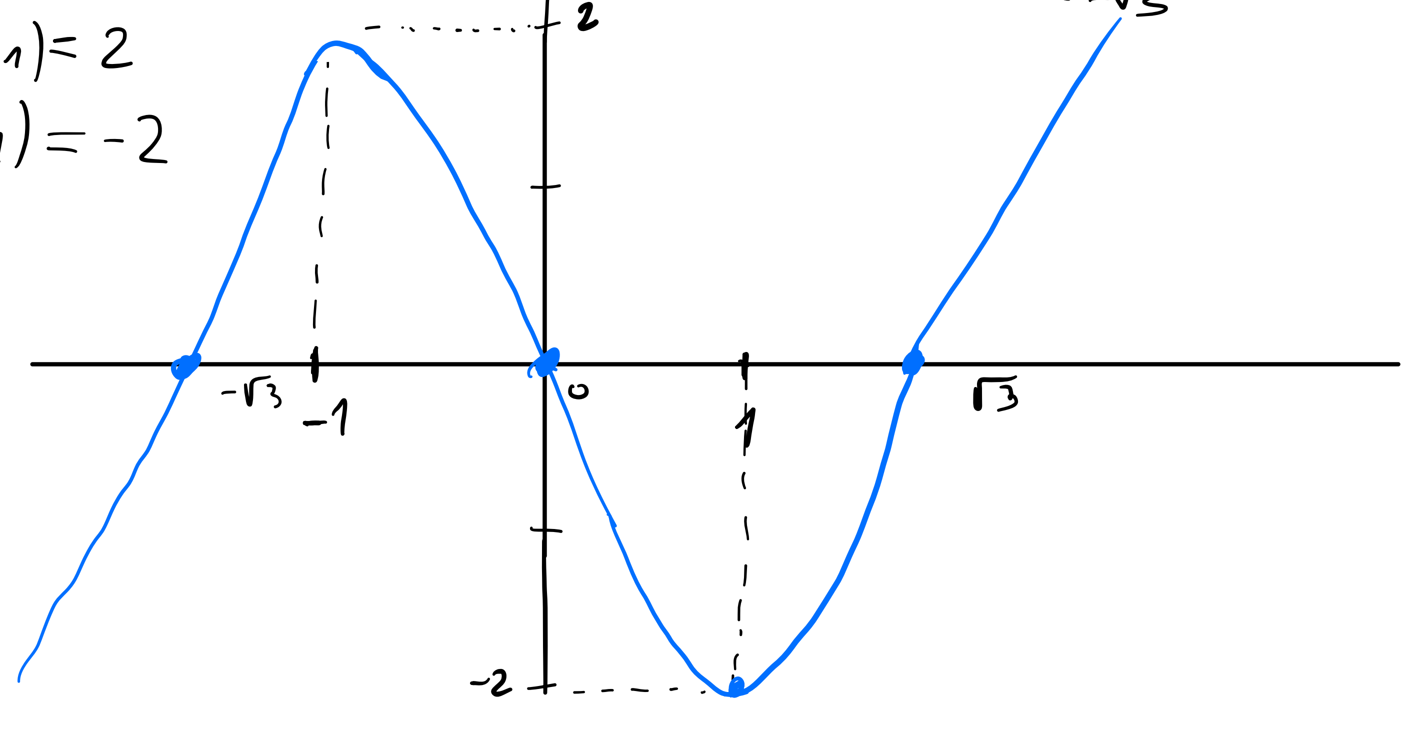
<u>Grafiquemos f</u>

<u>Raíces de f</u>: $f(x) = 0$

$$x^3 - 3x = x(x^2-3) \begin{cases} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{cases}$$

$f(-1)=2$

$f(1)=-2$



Otra aplicación del Teorema de Lagrange

Sea I un intervalos, y

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y

tal que $f'(x)=0 \quad \forall x \in I$

Entonces f es una función constante

Veamos como deducir esto usando el Teorema de Lagrange.

Tomemos $x_0 \in I$ cualquiera.

Queremos ver que $f(x_0) = f(x) \quad \forall x \in I$

Para eso tomemos $x \neq x_0$ en I cualquiera

Por Lagrange sabemos que $\exists\, c \in (x, x_0)$ /

Por Lagrange, sabemos que $\exists\, c \in (x_0, x) /$

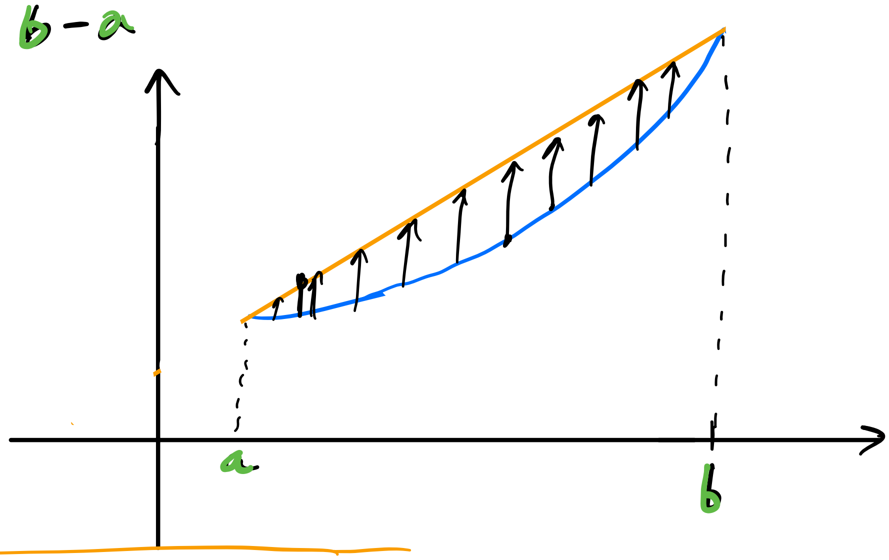
$$0 = f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$f(x) = f(x_0).$$

Teorema de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continua, y derivable en (a,b).
Entonces, $\exists\, c \in (a,b) /$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Demostración:

Consideremos

$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

definida como

$$g(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x \boxed{- \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a + f(a)}$$ Constante

Podemos verificar que $g(a) = f(a)$
$g(b) = f(b)$

HACER LA CUENTA

Definimos

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

h es continua en $[a,b]$ por ser resta de continuas

h es derivable en (a,b) —— " —— derivables

Además $h(a) = g(a) - f(a) = 0$

$h(b) = g(b) - f(b) = 0$

Entonces, por el teorema de Rolle,

$$\exists\ c \in (a,b) \ / \ h'(c) = 0$$

Pero, $h'(x) = g'(x) - f'(x)$

y $g'(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \quad \forall x$

entonces $0 = h'(c) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) - f'(c)$

$$\Rightarrow f'(c) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \qquad \blacksquare$$

Ejercicio del práctico

$f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

SABEMOS QUE c EXISTE POR EL TEOREMA DE LAGRANGE

Hallar $c \in (1,3)$ / $f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{(3+\frac{1}{3}) - (1+\frac{1}{1})}{3-1} = \frac{2}{3}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Tenemos que hallar $x \in (1,3)$ /

$1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{x^2}$

$\Longleftrightarrow x^2 = 3 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Entonces $c = \sqrt{3} \in (1,3)$ y cumple

$f'(c) = \frac{2}{3}$