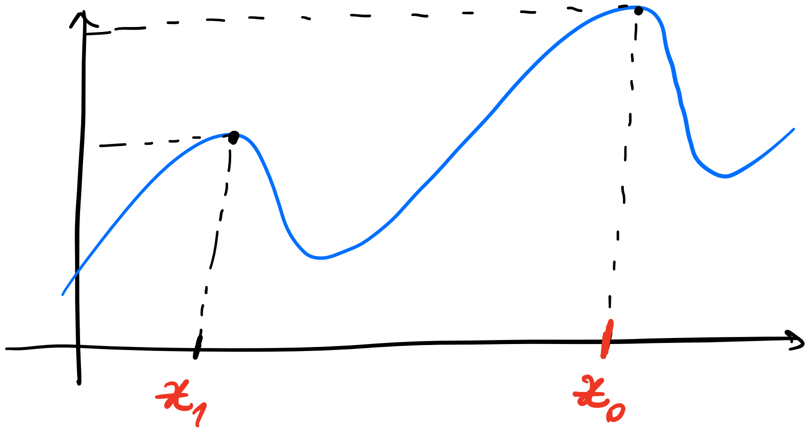
$f: I \to \mathbb{R}$



Máximo de f es
$\max\{f(x) : x \in I\} = f(x_0)$

"f presenta un máximo relativo en x_1"

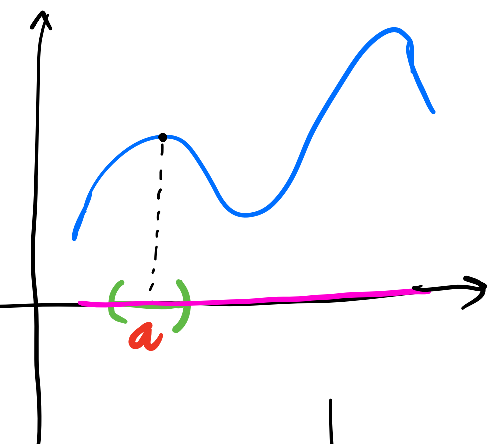
Veamos la definición formal

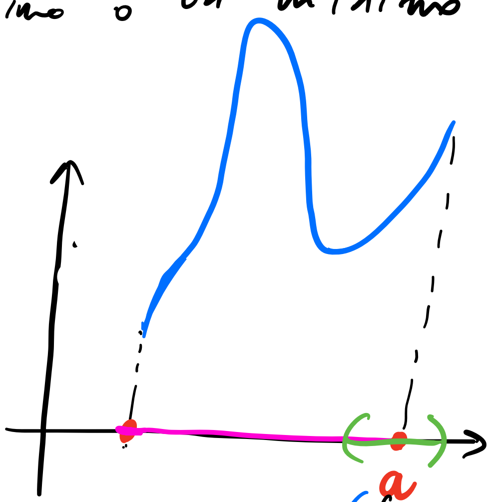
Def: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ función.

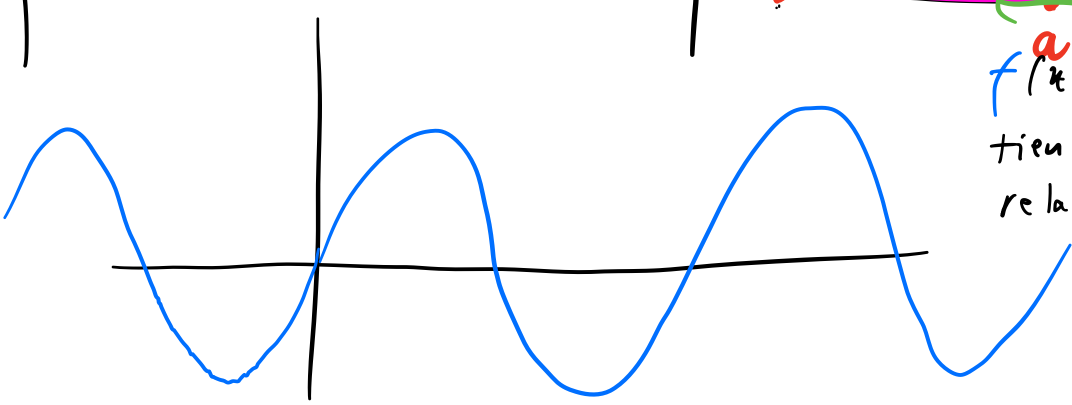
Decimos que f presenta un máximo relativo (mínimo) en $a \in I$ si:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;/\; \text{si } x \in E(a, \varepsilon) \cap I \Rightarrow f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(a)$$

Decimos que f presenta un extremo relativo en a si f tiene un máximo o un mínimo relativo en a.







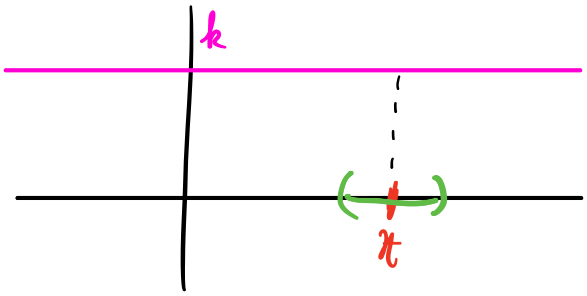
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ tiene infinitos mínimos relativos e infinitos máximos relativos.

Además todos los mínimos relativos son mínimos absolutos y todos los máximos relativos son máximos absolutos.

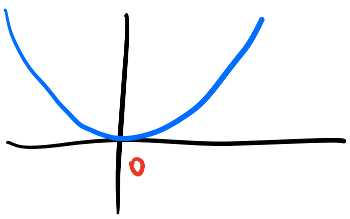
Ejemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = k$ (constante)

Todo $x \in \mathbb{R}$ es mínimo relativo y máximo relativo de f.



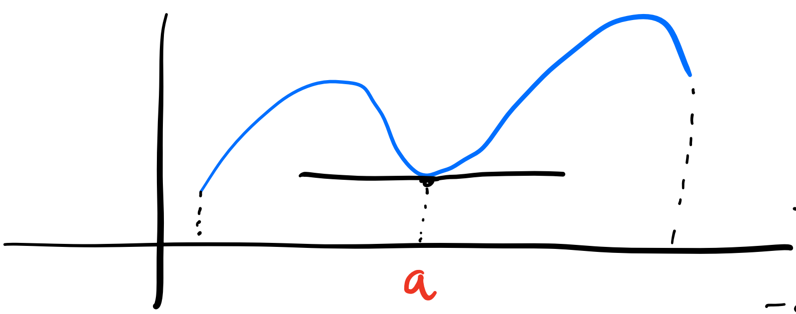
Ejemplo: $f(x) = x^2$

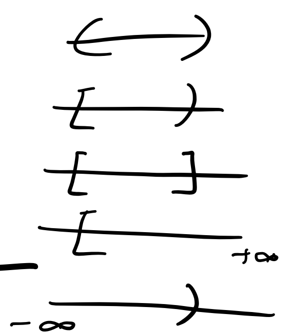


f presenta un mínimo relativo en 0 que también es mínimo absoluto.

$f(x) = |x|$ también.

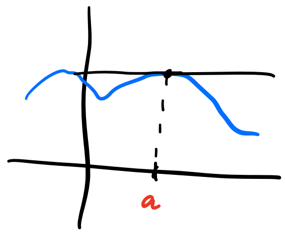
HACIA EL TEOREMA DE ROLLE:





Proposición: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ función derivable en a perteneciente al interior de I (a no está en el borde del intervalo)

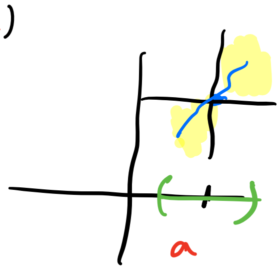
Entonces, si f presenta un mínimo (o máximo) relativo en a, entonces $f'(a) = 0$



Lema: Si f es derivable en a y $f'(a) > 0$

Entonces, $\exists\, \delta > 0 \,/\,$ si $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < f(a)$

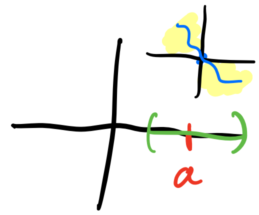
$\cdot$ si $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a)$



Si $f'(a) < 0$

Entonces, $\exists\, \delta > 0 \,/\,$ si $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > f(a)$

$\cdot$ si $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a)$



Recordamos (el Lema de conservación del signo)

Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} h(x) = L > 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, h(x) > 0 \quad \forall x \in E^*(a, \delta) \cap I$$

Demostración del Lema

Supongamos que $f'(a) > 0$

Esto quiere decir que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$

Por el lema de conservación del signo $\exists\, \delta > 0$ /

Por el Lema de conservación del signo, $\exists\, \delta > 0 /$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0 \quad \forall x \in E^*(a,\delta)$$

Entonces, $sg\left(f(x)-f(a)\right) = sg(x-a) \quad \forall x \in E^*(a,\delta)$

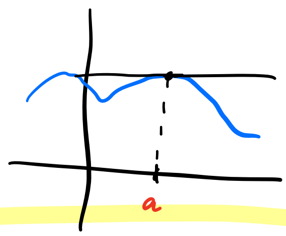
Entonces, si $x < a \Rightarrow x-a<0 \Rightarrow f(x)-f(a)<0 \Rightarrow f(x)<f(a)$

si $x > a \Rightarrow x-a>0 \Rightarrow f(x)-f(a)>0 \Rightarrow f(x)>f(a)$

La prueba para el caso $f'(a)<0$ es análoga.

Veamos la prueba de:

Proposición: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ función derivable en a perteneciente al interior de I (a no está en el borde del intervalo). Entonces, si f presenta un mínimo (o máximo) relativo en a, entonces $f'(a) = 0$



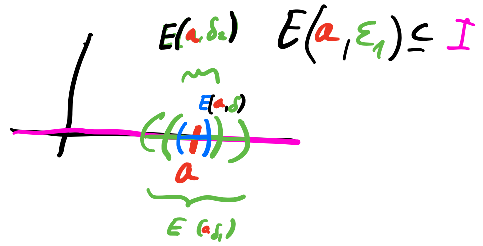
Demostración:

Como a pertenece al interior de I, $\exists\, \varepsilon_1 > 0 /$ $E(a,\varepsilon_1) \subseteq I$

Supongamos que f presenta un mínimo relativo en a y veamos que $f'(a)=0$.

Si no fuera el caso, tendríamos que, o

$f'(a)<0$ ó $f'(a)>0$. Veremos que ambos casos llevan a una contradicción con el hecho de que f presenta un mínimo relativo en a.



Supongamos que $f'(a)>0$.

Por el Lema anterior, $\exists\ \delta_2>0$ /

- si $x\in(a-\delta_2, a) \Rightarrow f(x)<f(a)$
- si $x\in(a, a+\delta_2) \Rightarrow f(x)>f(a)$

Veamos que f no presenta un mínimo relativo en a.

Entonces, tenemos que ver que $\forall\ \delta>0$,

$\exists\ x\in E(a,\delta)\cap I$ / $f(x)<f(a)$

Para ver esto, tomar $\bar{\delta}=\min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$

Luego, si $x\in(a-\bar{\delta}, a)$

- $x\in I$ (porque $\bar{\delta}<\delta_1$)
- $f(x)<f(a)$ (porque $\bar{\delta}<\delta_2$)
- $x\in E(a,\delta)$ (porque $\bar{\delta}<\delta$)

Entonces $x\in E(a,\delta)\cap I$ y $f(x)<f(a)$

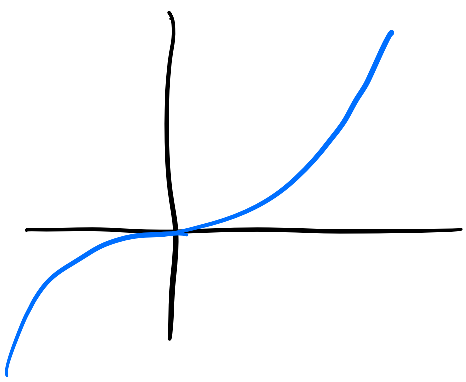
Como δ es arbitrario f no presenta un mínimo relativo en a.

Si asumimos $f'(a) < 0$ llegamos a una contradicción parecida.

Entonces concluimos que la única opción es que $f'(a) = 0$.

$\blacksquare$

Importante: NO VALE EL RECÍPROCO



$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$

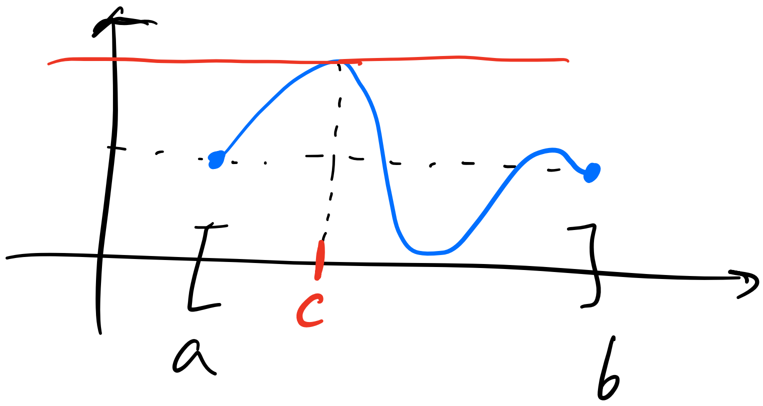
se anula en 0. $(f'(0) = 0)$

Pero f no presenta un extremo relativo en a

TEOREMA DE ROLLE

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $f(a) = f(b)$.

Entonces $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$



Weierstrass

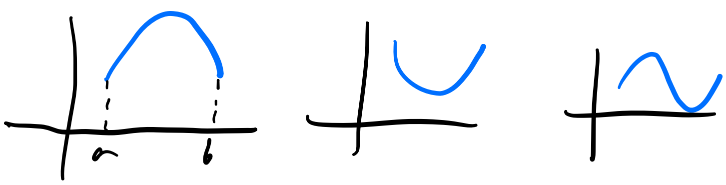
Idea de la prueba: f cont. en $[a,b] \Longrightarrow f$ tiene máximo y mínimo

Caso I: $\max f = \min f \Longrightarrow f$ constante

$\Longrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Caso II: $\max f \neq \min f$

Entonces $\max f \neq f(a)$ o $\min f \neq f(a)$



Supongamos que $\max f \neq f(a)$

$\max f = f(c) \neq f(a) \Longrightarrow f(c) \neq f(b)$

entonces $c \in (a,b)$

Como f presenta máximo absoluto en c, en particular presenta un máximo relativo en c.

Entonces por la Prop. anterior

$$f'(c)=0$$