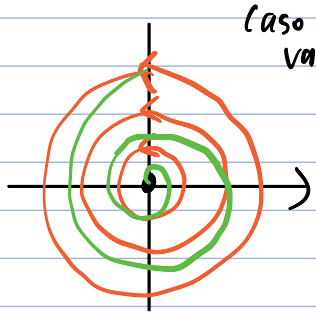
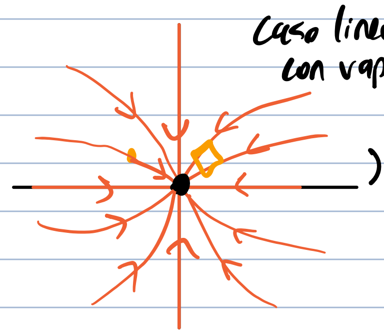
Estabilidad (de ptos críticos):





Con funciones de energía podemos identificar la naturaleza del crítico (si es estable y en caso de serlo si es asintóticamente estable).

- Ej 3, P5:

Sea $F(x) := -\frac{d}{dx}U(x)$ con U de clase C^2 función a $\mathbb{R}$

→ Supongamos que estamos modelando el comp. de una partícula de masa m sometida a F.

$m\ddot{x} = F(x)$ (2da ley de Newton)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{F(x)}{m} = -\frac{dU}{dx}(x)\cdot\frac{1}{m} \end{cases}$$

Definimos la energía mecánica del sistema como $H(x,y) = \frac{my^2}{2} + U(x)$

a) Asumimos $(x(t), y(t))$ soluc. de $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU}{dx}(x)\cdot\frac{1}{m} \end{cases}$ → Queremos ver que $H(x(t),y(t))$ es constante a lo largo del tiempo

$$\frac{d}{dt}H(x(t),y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}y^2_{(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(U(x(t))\right) = m\cdot y(t)\cdot\dot{y}(t) + \frac{dU}{dt}(x(t))\cdot\dot{x}(t)$$

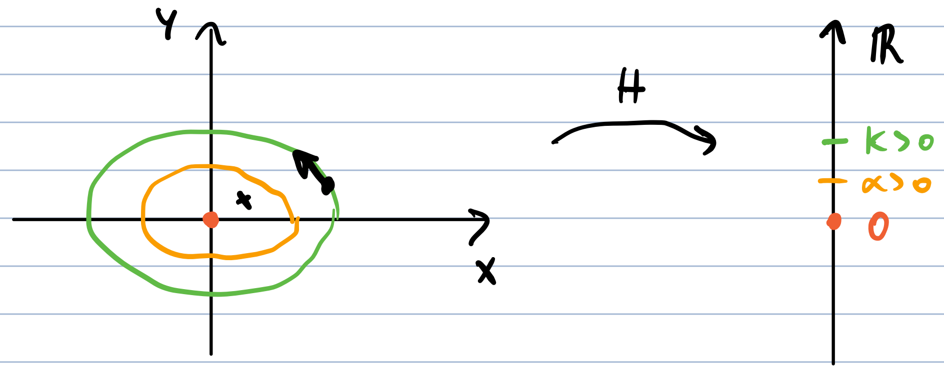
$$= \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\cdot \cancel{y(t)\cdot\left(-\frac{dU}{dx}(x)\right)} + \cancel{\frac{dU}{dt}(x(t))\cdot y(t)} = 0$$

⇒ H es una preintegral (se conserva la energía)

b) Si $U(x) = \frac{Kx^2}{2}$ $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{x}{m} \end{array} \right.$ $\quad (\dot{x}, \dot{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/m & 0 \end{pmatrix}$

Esto modela el mov de una partícula atada a un resorte.

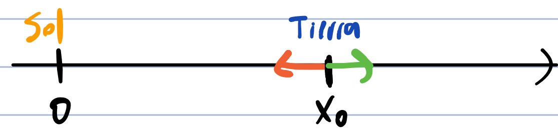
En este caso la H es $H(x,y) = \frac{my^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$ $\quad \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = K$



$(cte_1) \cdot x^2 + (cte_2) y^2 = R^2$

Observar que necesariamente el equilibrio es estable y no asintóticamente estable.

c)



- $x(t) \to$ posición tierra.
- $H(x,y) = \frac{my^2}{2} + U(x) = \boxed{\frac{my^2}{2} - K \cdot \frac{1}{x}}$
- Ecuación del sistema o $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{K}{m} \cdot \frac{1}{x^2} \end{array} \right.$

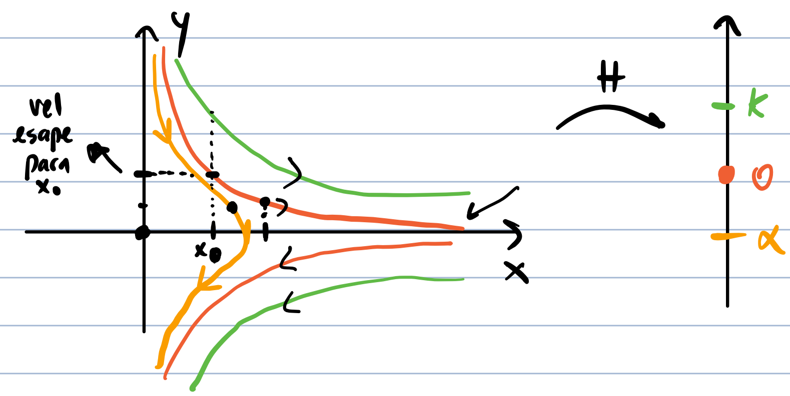
· $F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{K}{x^2}$ (fuerza gravitatoria)

(Vamos a asumir $m=1$, $K=1$)

$$\boxed{H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x}}$$

Observación: Si $x_0 > 0$, $y_0 = 0$ $\Rightarrow$ $H(x_0, y_0) = H(x(t), y(t)) = -\frac{1}{x_0} < 0$

Afirmación 1: Si la energía H es negativa, la Tierra colisiona con el Sol.



- $H(x,y) = 0$ sii $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{x}$
  sii $y^2 = \frac{1}{x}$
- $H(x,y) = K > 0$ sii $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{x} + K$
- $H(x,y) = \alpha < 0$ sii $\frac{y^2}{2} = \frac{1}{x} + \alpha$

Si $H<0$
$\Rightarrow$ comp x
del conj de nivel $H=-1$
acotado
(vale en gral $H=a<0$)

$$\left(H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow -1 < -x \Rightarrow x < 1 \right)$$

Obs: Si fijamos x_0 pos. inicial (>0), si ponemos vel. inicial $y_0<0$ colisiono con el Sol.
Sin embargo si $y_0>0$ hay tres posib:
- y_0 es chica $(H<0)$ colisiono
- y_0 es vel. escape $(H=0)$ escapa
- $y_0>$ vel escape $(H>0)$ escapa sobrad

¿Cómo encontrar vel esape dada cond inicial $x_0>0$?

Como vimos la vel. escape se da cuando $H=0$ $\Rightarrow$ $H(x_0,y_0)=0$ sii $y_0^2 = \frac{1}{x_0}$

sii $y_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$

$=0$

>0