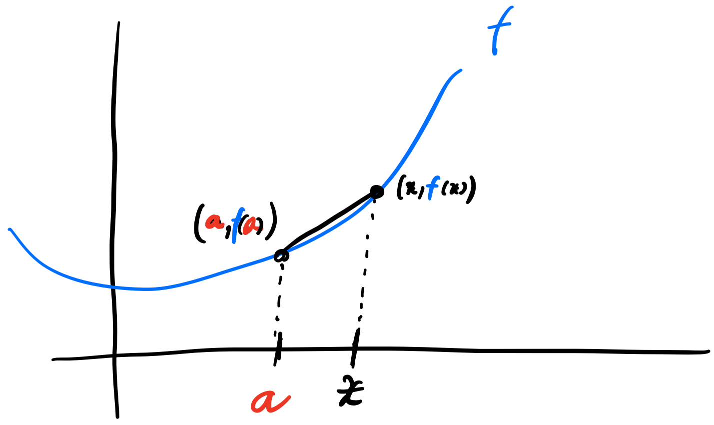
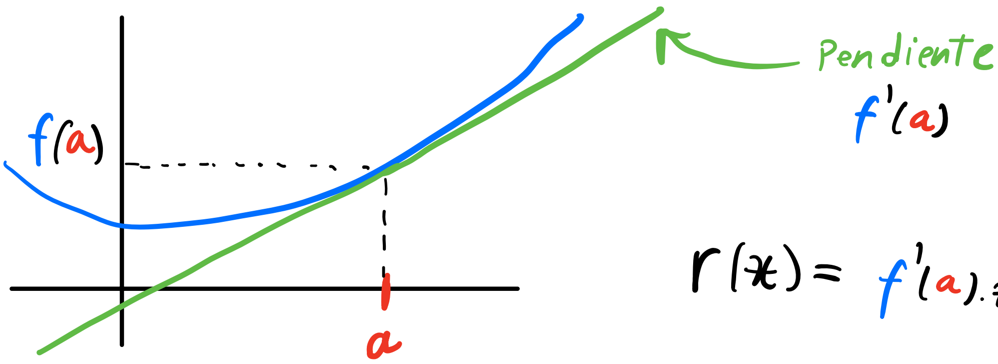
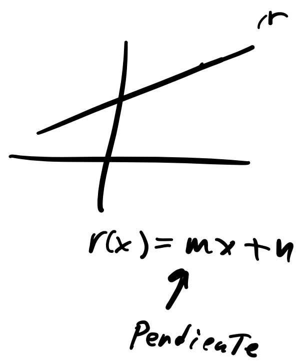


$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

LA RECTA TANGENTE AL GRÁFICO DE f QUE PASA POR EL PUNTO $(a, f(a))$





$$r(x) = f'(a).x + n$$

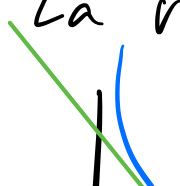
$$r(a) = f'(a)a + n = f(a) \Rightarrow \boxed{n = f(a) - f'(a)a}$$

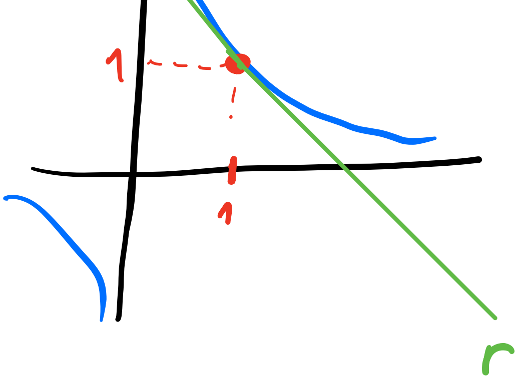
Concluímos que la ecuación de la recta tangente al gráfico de f por el punto $(a, f(a))$ es

$$\boxed{r(x) = f'(a).x + f(a) - f'(a)a}$$

Ejemplo: $f(x) = 1/x$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$; $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$

La recta Tang. al gráfico de f por $(1, f(1))$





$(1,1)$

$$\boxed{\begin{aligned} r(x) &= (-1)x + 1 - (-1)1 = \\ &= -x+2 \end{aligned}}$$

ÁLGEBRA DE DERIVADAS

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$

Supongamos además que f y g son derivables en a. Entonces:

(I) $f+g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

(II) $\alpha \in \mathbb{R}$

αf es derivable en a y

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

Linealidad de la derivada

(III) Regla de Leibnitz

$(f.g)$ es derivable en a y

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Aplicaciones:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x(x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 =$$

Leibnitz

$$= 2x$$

$$(x^3)' = (x \cdot x^2) = (x)' x^2 + x (x^2)' =$$

Leibnitz

$$= x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

En general: $(x^n)' = n\, x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Por ejemplo: $(x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)\, x^{-2} = \frac{-1}{x^2}}$$

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha - 1}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

CASO RARO DE LA FÓRMULA

$$(1)' = (x^0)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$$

Ejemplo:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot (x^2+1) = g(x) \cdot h(x)$$

donde $g(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow g'(x) = \cos(x)$
$h(x) = x^2+1 \longrightarrow h'(x) = 2x$

$$f'(x) = (g(x) \cdot h(x))' \underset{\text{Leibnitz}}{=} g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) =$$

$$= \boxed{\cos(x) \cdot (x^2+1) + \operatorname{sen}(x) \cdot 2x}$$

Veamos la prueba de que

f y g derivables en $a \Rightarrow (f+g)$ derivable en a y
$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Para ver que $f+g$ es derivable en a tenemos que ver que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} \;\underline{\underline{*}}$$

$$\boxed{(f+g)(x)-(f+g)(a) = f(x)+g(x)-\big(f(a)+g(a)\big) = \\ =\big(f(x)-f(a)\big)+\big(g(x)-g(a)\big)}$$

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\frac{\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}}_{\to f'(a)} + \underbrace{\frac{\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}}_{\to g'(a)} = \boxed{f'(a)+g'(a)}$$

REGLA DE L'HOPITAL

Proposición: Sean f y g funciones definidas en un entorno I, derivables, salvo posiblemente en $a \in I$. Supongamos además que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Entonces, si $g'(x) \neq 0$ en un entorno de a

y $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

L'hopital

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \Longleftarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$\operatorname{sen}(x) \to 0$, $x \to 0$, $\cos(x) \to 1$

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

$$(x)' = 1$$

Acabamos de probar que

$\operatorname{sen}(x) \sim x$ cuando $x \to 0$

Veamos que $1 - \cos(x) \sim x^2/2$ cuando $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{(x^2/2)} = 1 \Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \Longleftarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

L'hopital L'hopital

$1-\cos(x) \to 0$, $(x^2/2) \to 0$, $\operatorname{sen}(x) \to 0$, $x \to 0$

$$(1-\cos(x))' = \operatorname{sen}(x)$$

$$\left(x^2/2\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

EJEMPLO DE CÁLCULO DE DERIVADA

Leibnitz

$$\left(1-\cos^2(x)\right)' = (1)' - \left(\cos^2(x)\right)' = -\left(\cos(x)\cdot\cos(x)\right)' =$$

$$= -\left(\left(\cos(x)\right)'\cos(x) + \cos(x)\left(\cos(x)\right)'\right) =$$

$$= -\left(-\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) + \cos(x)\left(-\operatorname{sen}(x)\right)\right) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$