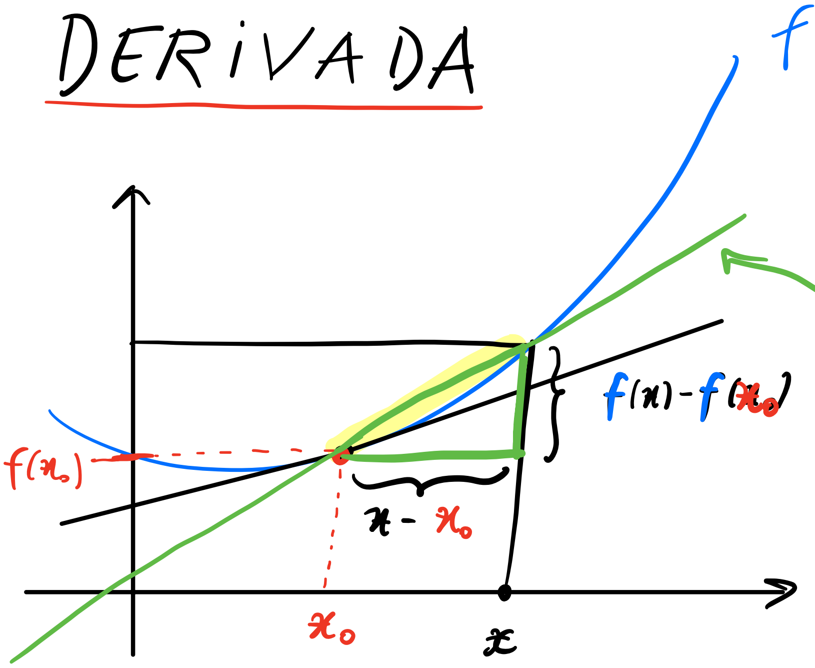
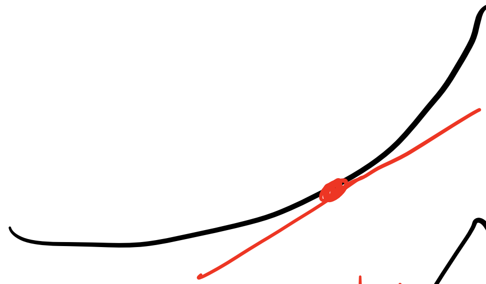
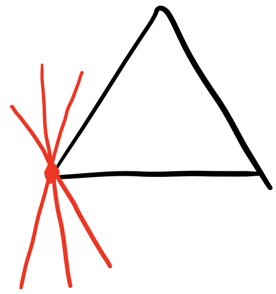
DERIVADA



pendiente

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



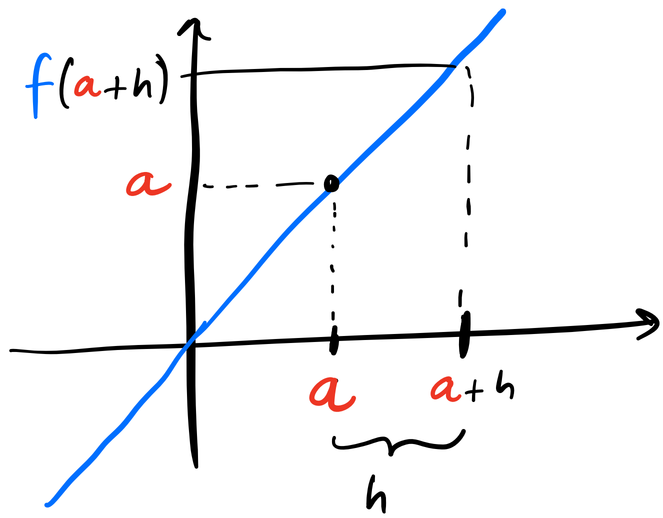


cociente incremental

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ejemplo:

$$f(x) = x$$



Estudiemos la derivada en $x_0 = 1$ de f

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to 1} \overset{=1}{\frac{x-a}{x-a}} = 1$$

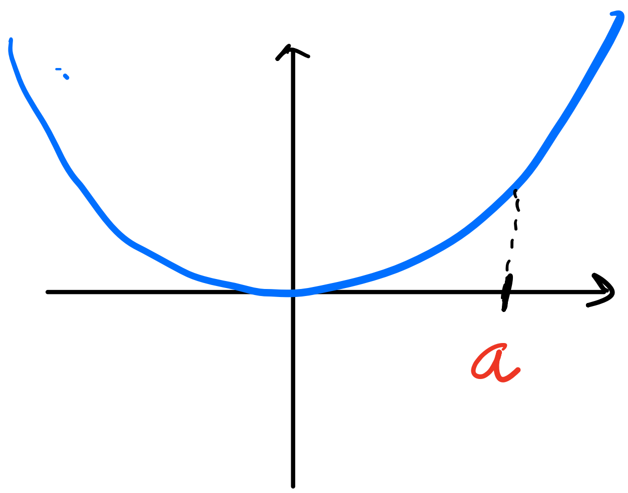
$f'(a) = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$. La función derivada es la función constante 1

OTRA FORMA DE PLANTEAR EL COCIENTE INCREMENTAL

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h = x - a$

Ejemplo: $f(x) = x^2$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h + 2a = 2a$$

La derivada de $f(x) = x^2$ en a es igual a $2a$: $f'(a) = 2a$

DE LA OTRA MANERA

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \overset{=x+a}{\frac{x^2-a^2}{x-a}} =$$

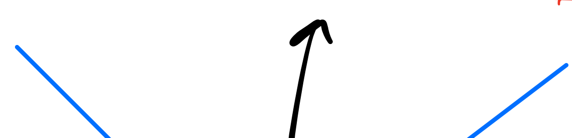
$$\lim_{x\to a} x+a = 2a$$

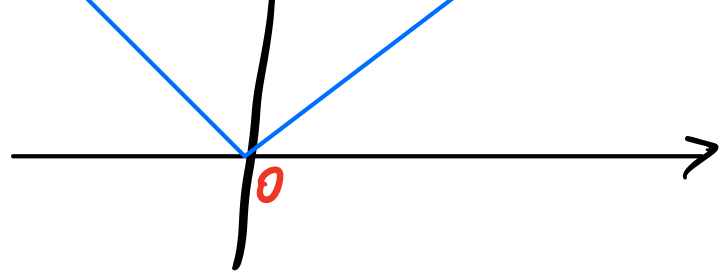
$$f'(x) = 2x$$

Decimos que f es <u>derivable</u> en a si $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y al valor del límite lo llamamos la derivada de f en a y la anotamos $f'(a)$.

Ejemplo de función ||NO|| derivable en 0

$$f(x) = |x|$$





Estudiemos la derivabilidad de f en 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \leftarrow \nexists$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

No existe porque

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Decimos que f es derivable si es derivable en todos sus puntos.

Ejemplo: $f(x) = k$ (cte)

Veamos que f es derivable, y f' es la función constante 0.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\overset{0}{\overset{\parallel}{k-k}}}{x-a} = 0$$

TEOREMA (DERIVABLE $\Rightarrow$ CONTINUA)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $a\in\mathbb{R}$. Entonces f es continua en a.

En particular, si f es derivable (en todos sus puntos) entonces f es continua (en todos puntos)

Demostración:

Supongamos que es derivable en a

entonces, queremos ver que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

o lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{} = \lim_{x \to a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}}_{\to f'(a)} \underbrace{(x-a)}_{\to 0}$$

$$= 0$$

ALGUNAS FUNCIONES DERIVABLES

SPOILER

- Polinomios

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 2 x^1 + 0 = 3x^2 - 6x$$

En general: $(x^n)' = n\, x^{n-1}$

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$