Universidad de la República | **Matemática Discreta 2**
Facultad de Ingeniería | **Segundo semestre 2024**
Instituto de Matemática y Estadística

PRÁCTICO 9: Conjunto cociente, Subgrupos normales y Grupo cociente

Ejercicio 1. En cada caso, hallar las clases laterales por izquierda y por derecha del subgrupo H en el grupo G, y determinar si H es un subgrupo normal de G.

a. El grupo aditivo $G = \mathbb{Z}_6$, y el subgrupo $H = \langle \bar{3} \rangle$, generado por la clase $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$.

b. El grupo multiplicativo $G = U_{14}$, y el subgrupo $H = \langle \overline{13} \rangle$.

c. $G = D_3$, el grupo de las simetrías de un triángulo equilatero (con la operación de composición), y $H = \langle s_1 \rangle$, el subgrupo generado por la simetría axial del triángulo.

Ejercicio 2.

a. Sea G un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G.

b. Pruebe que $H = 3\mathbb{Z}$ es normal en $G = (\mathbb{Z}, +)$. Calcule el grupo cociente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y su tabla de Cayley.

c. Sea G un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo H de G es normal en G. Sugerencia: pruebe que G es conmutativo.

d. Pruebe que $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$ es subgrupo normal en $G = U(9)$. Halle el cociente G/H y calcule $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$.

Ejercicio 3. Sea $GL_2(\mathbb{R})$ el grupo de las matrices invertibles 2×2 de coeficientes reales, con el producto usual de matrices. Sean

$$U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}.$$

a. Pruebe que U es un subgrupo de T.

b. Calcule las clases laterales por derecha y por izquierda de U en T.

c. Pruebe que U es un subgrupo normal de T.

d. Pruebe que U es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$, y determine si U es un subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4. Sea $(S_3, \circ)$ el grupo de las permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$.

a. Considere el siguiente subgrupo de S_3:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pruebe que H no es un subgrupo normal. Sugerencia: considere $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$.

b. Considere el siguiente subgrupo de S_3:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

i) Calcule el conjunto cociente S_3/H (formado por las clases laterales por izquierda gH).

ii) Pruebe que H es un subgrupo normal de S_3.

iii) Calcule la tabla de Cayley del grupo cociente. Observe que S_3 no es conmutativo, y sin embargo el grupo cociente S_3/H sí es conmutativo.

Ejercicio 5. Sea H el subgrupo de S_4 que consiste en las permutaciones $\sigma \in S_4$, tales que $\sigma(4) = 4$. Probar que H no es normal en S_4. Sugerencia: encontrar $g \in S_4$, tal que: $gHg^{-1} \not\subset H$.

Ejercicio 6. Sea $\{H_i\}_{i\in I}$ una familia de subgrupos normales de un grupo G. Probar que $\cap_{i\in I} H_i$ es un subgrupo normal en G.

Ejercicio 7. Sea H un subgrupo con índice 2 en un grupo G. Es decir: H tiene exactamente 2 clases laterales por izquierda en G. Probar que H es un subgrupo normal de G. Sugerencia: todo grupo G se puede escribir como la unión disjunta de las clases laterales por izquierda. Lo mismo para las clases laterales por derecha.

Ejercicio 8. Sea G un grupo y H un subgrupo de G de orden finito.

a. Pruebe que gHg^{-1} es un subgrupo de G, para todo $g \in G$.

b. Pruebe que la conjugación preserva el orden del subgrupo. Es decir: $|gHg^{-1}| = |H|, \ \forall\, g \in G$.

c. Supongamos que G posee un único subgrupo H de orden d. Pruebe que H es normal.

Ejercicio 9. Sea S un subconjunto de un grupo G. Se define el normalizador de S en G como:

$$N_S = \{x \in G : xSx^{-1} = S\}.$$

a. Probar que N_S es un subgrupo de G.

b. Supongamos que S es un subgrupo de G. Probar que S es un subgrupo normal de N_S.

Ejercicio 10. Se define el centro de un grupo G como: $Z_G = \{x \in G : xg = gx, \text{ para todo } g \in G\}$.

a. Calcule el centro de $GL_2(\mathbb{R})$.

b. Probar que Z_G es un subgrupo normal de G, para todo grupo G.

c. Probar que, cualquiera sea $S \subset G$, se tiene: $Z_G \subset N_S$.

d. Probar que si G/Z_G es un grupo cíclico, entonces G es conmutativo.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 11. Sea H un subgrupo de G, definido de la siguiente forma: $H = \{g^2, \ g \in G\}$.

a. Probar que H es un subgrupo normal de G. Sugerencia: probar que $gHg^{-1} \subseteq H, \ \forall\, g \in G$.

b. Probar que $gH = g^{-1}H, \ \forall\, g \in G$. Es decir: $g \sim g^{-1}$ en G/H, para todo $g \in G$.

c. Probar que G/H es un grupo conmutativo. Sugerencia: usar la parte anterior.

Ejercicio 12. Sea D_4 el grupo de simetrías del cuadrado, y $H = \{id, r^2\}$; donde r es la rotación de 90 grados respecto al origen del plano. Pruebe que H es un subgrupo normal de D_4, y que el cociente D_4/H es conmutativo. Notar que D_4 no es conmutativo. Sugerencia: usar el ejercicio anterior.