Práctico 11 – Matriz asociada a una transformación lineal.

1. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ en los siguientes casos.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

   b) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

   c) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,3),(2,5)\}$.

2. Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$_{\mathcal{U}}(T)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
   donde $\mathcal{E} = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ y $\mathcal{U} = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$.

   a) Hallar $T(x^2+x-1)$.

   b) Hallar la expresión general de $T(p)$ siendo $p = ax^2+bx+c$ un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y la transformación
$$T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
   definida por
$$T(B) = AB.$$

   a) Demostrar que T es lineal.

   b) ¿Existen bases en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea justamente A?. Justifique la respuesta.

   c) Para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
   hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   donde $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0))$ y $\mathcal{A} = ((1,2,0),(2,1,0),(1,1,1))$.
   ¿T está bien definida?, es decir, ¿hay una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, hallar $T(x,y,z)$.

5. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$T(x,y,z) = (2x-y+z, 3y-z, x+2y+z).$$
   Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por
$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(-1,1,2)\}.$$
   Hallar la matriz asociada de la restricción de T a S, $T|_S\colon S \to \mathbb{R}^3$, utilizando $\mathcal{A}$ como base de S y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

6. Hallar las dos matrices de cambio de base entre la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base
$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,1),(-1,0,1)\},$$
   es decir, ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{C}}$ siendo $T = Id_{\mathbb{R}^3}$. Verificar que esta matriz de cambio de base es la inversa de la otra matriz de cambio de base que se puede definir.

7. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente y $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

a) Demostrar que existen $k \in \mathbb{N}$, B base V y C base de W tal que la matriz asociada en estas bases esta dada por

$$({}_C(T)_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

b) Sea $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a,b,c,d,e) = \begin{pmatrix} a-d & -a+b+3c-3d \\ b+3c-3d-e & d-e \end{pmatrix}.$$

Hallas bases B y C de $\mathbb{R}^5$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivamente, tal que la matriz asociada a T en esas bases sea

$${}_C(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 5
- Ejercicio 6