Práctico 10 – Transformaciones lineales. Núcleo e imagen. Teorema de las dimensiones.

Concepto y ejemplos de transformaciones lineales

1. En los siguientes casos determinar si la función T es una transformación es lineal:

   a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$.

   b) $T\colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0)$, donde $\mathcal{C}[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$.

   c) Dado $v \in \mathbb{R}^3$ fijo, y $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \langle u, v\rangle$.

   d) $T\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \text{rango}(A)$.

   e) $T\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $T(A) = A^T$.

   f) Dados V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, B una base de V, y $T\colon V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = \text{coord}_B(v)$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1,0,0) = (2,1,0),\ T(1,1,0) = (-1,2,3,),\ T(1,1,1) = (0,0,1).$$

   Indicar si T está bien definida y en caso afirmativo hallar $T(x,y,z)$ para todo (x,y,z).

3. *a*) Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T(1) = (1,0),\quad T(x) = (1,1),\quad T(x^2) = (0,0),$$

   donde $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2. Hallar $T(p)$ para todo p.

   b) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1,0,0) = (2,1,0),\ T(1,1,0) = (-1,2,3),\ T(1,1,1) = (0,0,1).$$

   ¿Existe una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas?. Justifique su respuesta. Si es afirmativa, entonces hallar $T(3,2,1)$.

   c) Determinar si existe alguna transformación $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

$$T(1) = (1,0),\ T(1+x) = (1,1),\ T(1+x+x^2) = (0,0),\ T(3+2x+x^2) = (2,1).$$

   En caso de que exista, alguna hallarlas todas.

4. En los siguientes casos hallar la expresión analítica de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuántas hay:

   a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (2,1,0),\ T(1,2,1) = (-1,2,3),\ T(1,0,-3) = (0,0,1)$;

   b) $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(M_1) = (1,-1),\ T(M_2) = (1,1),\ T(M_3) = (1,1),\ T(M_4) = (3,1),\ T(M_5) = (1,-3),$$

   donde

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Núcleo e imagen de una transformación lineal

5. Hallar el núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(1)+p(-1), p(0))$.

   b) $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \text{traza}\,(A)$.

6. Se consideran las transformaciones $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que
$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix},$$
y
$$S\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$$
definida por
$$S(A)(x) = (1\ \ x)A\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$
Verificar que T y S son lineales, y hallar el núcleo y la imagen de T, S y $S \circ T$.

7. Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, definimos la transformación lineal $T_A\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como $T(M) = AM$. Demostrar que T_A es invertible si sólo si A es invertible.

Teorema de las dimensiones

8. Sean $T\colon V \to \mathbb{R}$ y $S\colon V \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales, donde $\dim(V) = n$. Demostrar que:
   a) $\dim(N(T)) = n$ ó $n-1$.
   b) $N(T) = N(S)$ si y sólo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.
   c) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x,y,z) = x+y+z$. Hallar $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, lineal, sabiendo que $N(T) = N(S)$ y $S(1,0,0) = 2$.

9. Decidir si las dos afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.
   a) Si $T\colon V \to W$, lineal, es tal que existe un conjunto $A = \{v_1,\dots,v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{T(v_1),\dots,T(v_r)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.
   b) Si $T\colon V \to W$, lineal es tal que existe una base $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ de V, que cumple que $T(B) = \{T(v_1),\dots,T(v_n)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

10. Sean V y W espacios vectoriales con $\dim(V) < \dim(W)$, y $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to V$ transformaciones lineales.
    a) Demostrar que T no es sobreyectiva.
    b) Demostrar que S no es inyectiva.

11. Sean U, V y W espacios vectoriales, y $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ transformaciones lineales.
    a) Demostrar que $N(T) \subset N(S \circ T)$
    b) Si $S \circ T$ es inyectiva, demostrar que T es inyectiva.
    c) Demostrar que $Im(S \circ T) \subset Im(S)$
    d) Si $S \circ T$ es sobreyectiva, demostrar que S es sobreyectiva.
    e) Sean A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times n$, con $n < m$. Demostrar que BA no es invertible.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1: tres partes
- Ejercicio 3: dos partes
- Ejercicio 4
- Ejercicio 6
- Ejercicio 7
- Ejercicio 8
- Ejercicio 10
- Ejercicio 11: tres partes