Práctico 9 – Base y dimensión.

1. En los siguientes casos, hallar una base y la dimensión del subespacio S del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$.
   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(2) = 0\}$.
   c) $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{3x3}$, $S = \{A \in \mathcal{M}_{3x3} : A \text{ es simétrica}\}$.
   d) $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2x2}$, $S = \{A \in \mathcal{M}_{2x2} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

2. En cada parte, el conjunto S es un conjunto generador del espacio vectorial V. Encontrar una base que sea un subconjunto de S.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,-1,2), (4,-3,7), (2,0,5), (1,2,6)\}$.
   b) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ $S = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

3. Sea S un subconjunto LI de V. Agregar vectores a S hasta conformar una base de V.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,0,2,2), (1,1,0,0)\}$.
   b) $V = \mathbb{R}_3[x]$, $S = \{1 - x + x^2, x - x^2\}$.

4. En cada ítem probar que $\mathcal{B}$ es una base del espacio V, y hallar las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$.

   a) $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$, y $v = (1,2,3)$.
   b) $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right\}$, $V = \mathcal{M}_{2x2}$ y $v = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 6\end{pmatrix}$.

5. Discutir según $\alpha \in \mathbb{R}$ si el conjunto $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[t]$ donde

$$p_1(t) = 1 + t, \qquad p_2(t) = 1 + \alpha t + t^2, \qquad p_3(t) = 1 + t^2.$$

6. **Rango.** En este ejercicio se vincula el rango de una matriz con la dimensión de cierto espacio asociado a ella. En cada parte se brinda una $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y se debe calcular:

   - $\operatorname{rango}(A)$
   - La dimensión del espacio $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1} : AX = 0\}$.
   - Verificar que $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rango}(A) = n$.

$$a)\quad A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\ 2 & -6 & -3 & 1\\ -3 & 8 & 2 & -3\end{pmatrix} \qquad c)\quad A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 8\\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8\\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9\\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

7. En cada caso se debe hallar bases de los subespacios S_1, S_2, $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$. En función de ello deducir cuándo la suma es directa.

   a) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.
   b) $S_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = ax^2,\ \text{con } a \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(x) = cx^2 + bx + c,\ \text{con } b, c \in \mathbb{R}\}$.

8. Sea $\mathcal{B}_1 = \{(1,-2,1,1), (3,0,2,-2), (0,4,-1,1)\}$ base de S_1 y $\mathcal{B}_2 = \{(0,4,-1,1), (5,0,3,-1)\}$ base de S_2.

   a) Probar que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de $\mathbb{R}^4$.
   b) ¿ Se cumple que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2$?

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y S_1, S_2 dos subespacios de V.

   a) Probar que $V = S_1 \oplus S_2$ si y sólo si $V = S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$.
   b) Si $V = S_1 \oplus S_2$, probar que $dim(S_1) + dim(S_2) = dim(V)$.

c) Si $dim(S_1) + dim(S_2) = dim(V)$, ¿ se cumple que $V = S_1 \oplus S_2$?. Demostrar o dar un contraejemplo.

10. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B}_1$ base del subespacio S_1 y $\mathcal{B}_2$ base de S_2.

    a) Si $V = S_1 \oplus S_2$, probar que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V. ¿Vale el recíproco del resultado anterior?
    b) Si $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, ¿se cumple que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$? Demostrar o dar un contraejemplo.
    c) Si $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V y $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, probar que $V = S_1 \oplus S_2$.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1
- Ejercicio 2
- Ejercicio 3
- Ejercicio 4
- Ejercicio 5
- Ejercicio 6: una parte
- Ejercicio 7
- Ejercicio 10