Práctico 8 – Combinaciones Lineales, Dependencia e Independencia Lineal.

Combinaciones lineales y generadores

1. Investigar si el vector v se puede escribir como combinación lineal del conjunto $\mathcal{A}$, y en caso afirmativo hallar alguna de ellas.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,1),\ (3,-1,5),\ (1,1,0)\}$ y $v = (3,0,6)$.
   b) $\mathcal{A} = \{(1,3,2,1),\ (2,-2,-5,4),\ (2,-1,3,6)\}$ y $v = (2,5,-4,0)$.
   c) $\mathcal{A} = \{2-x,\ 2x-x^2\}$ y $v = 6-5x+x^2$.
   d) $\mathcal{A} = \{3x^3+x,\ -2x^2+x-1,\ 3x^3-2x^2+2x-1\}$ y $v = -3x^3+4x^2+x-2$.
   e) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   f) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}\right\}$ y $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

2. Hallar un generador finito de los siguientes subespacios S.

   a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$.
   b) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1-x) = p(1+x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
   c) $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0\}$.
   d) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A$ es simétrica$\}$.
   e) $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A$ es antisimétrica$\}$.

3. Determinar si el conjunto de vectores $\mathcal{A}$ es un generador del espacio vectorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \left\{(1,\pi), \left(\sqrt{2}, e\right)\right\}$.
   b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A} = \{(0,1,1), (0,0,1),\ (1,1,1),\ (1,-1,1)\}$.
   c) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{A} = \{(-1,2,0,0),\ (2,0,-1,0),\ (3,0,0,4),\ (0,0,5,0)\}$.
   d) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   e) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{A} = \left\{1,\ (x-2),\ (x-2)^2\right\}$.

4. Determinar si los conjuntos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ generan el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{A}_1 = \{(1,2,-1),\ (0,1,1),\ (2,5,-1)\},\quad \mathcal{A}_2 = \{(-2,-6,0),\ (1,1,-2)\}.$$

Conjuntos LI, conjuntos LD y conjuntos generadores

5. En los siguientes casos determinar si el conjunto $\mathcal{A}$ es linealmente independiente. Cuando no lo sea encontrar un subconjunto linealmente independiente que permita expresar a los restantes vectores como combinación lineal del subconjunto seleccionado.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,2,3),\ (0,1,2),\ (1,1,1)\ , (2,3,4)\}$.
   b) $\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   c) $\mathcal{A} = \{p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$, donde

$$p_1(x) = x^2+1,\quad p_2(x) = x^2+x,\quad p_3(x) = x+2,\quad p_4(x) = x^2+3x.$$

6. Discutir cuándo los siguientes conjuntos $\mathcal{A}$ son linealmente independientes según $a \in \mathbb{R}$. Cuando no lo sean, hallar un subconjunto linealmente independiente con la mayor cantidad de elementos posible.

   a) $\mathcal{A} = \{(a, a^2, 1),\ (-1, a, a),\ (0, 2a^2, a^2+1)\}$.

   b) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

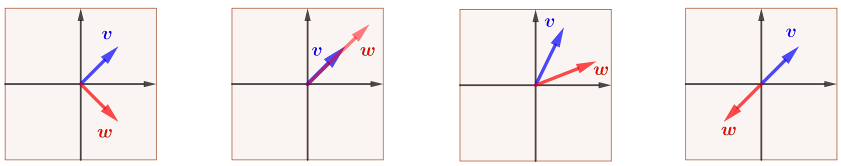
7. El conjunto $\mathcal{A}$ dado genera un subespacio S. Eliminar elementos de $\mathcal{A}$ hasta conseguir un generador de S que sea LI.

   a) $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

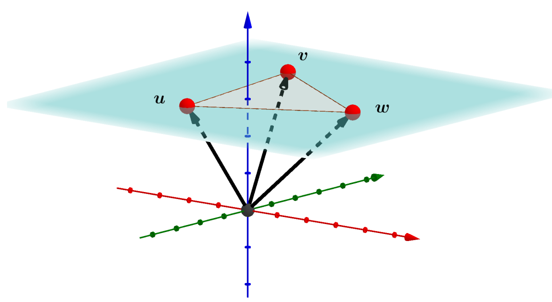
   b) $\mathcal{A} = \{x^2 - 1, x^3 + 2x, x, x^3 + x, 2x^2 - 1\}$

8. En los siguientes ejemplos determine en qué casos el conjunto es LI.

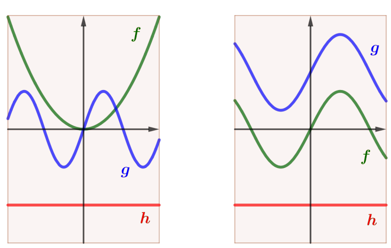
   a) En las siguientes figuras, determine si el conjunto $\{v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ es LI.



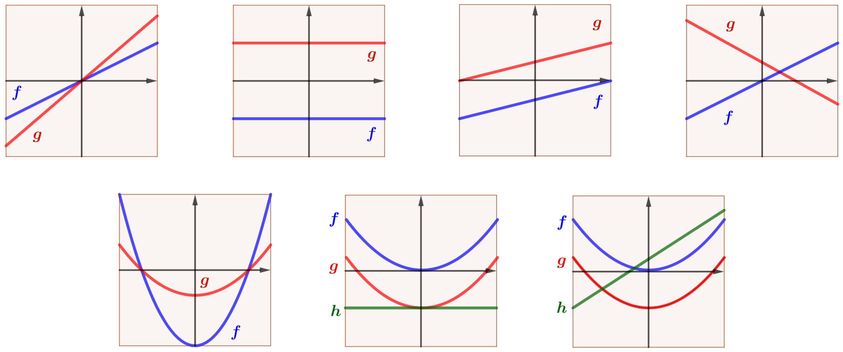
   b) En la siguientes figura, determine si el conjunto $\{u, v, w\} \subset R^3$ es LI.



   c) Utilizando las siguientes figuras determine si el conjunto de funciones $\{f, g, h\}$ es LI.



   d) En las siguientes figuras se expresan los gráficos (parciales) de funciones polnómicas, determine si $\{f, g\}$ o $\{f, g, h\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}_2[x]$.



9. Considere el siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \{\text{sen}(x),\ \cos(x),\ \text{sen}(2x),\ \cos(2x)\}.$$

Probar que $\mathcal{A}$ es un conjunto LI.

10. Sea V un espacio vectorial.

   a) Dado $\mathcal{A} \subset V$ un conjunto LI y $v \in V$ un vector, probar que $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \{v\}$ es LI si y solo si $v \notin [\mathcal{A}]$.

   b) Sean u, v, w tres vectores de V. Probar que $\{u, v, w\}$ es LI si y solo si $\{u+v, v, w-v+u\}$ es LI.

11. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz, $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \{Av_1, Av_2, \dots, Av_\ell\} \subset \mathbb{R}^m$.
Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

   b) Si $\mathcal{B}$ es linealmente independiente entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independiente.

   c) Si $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente.

En el caso de que alguna de las afirmaciones sea falsa dar un contraejemplo, y estudiar cuál o cuáles hipótesis adicionales sobre A permiten asegurar que la afirmación es verdadera.

12. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto LI de un espacio vectorial V. Se considera el vector

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad \text{con} \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

   a) Asumiendo que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i - v) = 0$, probar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.

   b) Bajo la hipótesis que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$, probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \dots, (v_n - v)\}$ es LI.

   c) Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ probar que $\{(v_1 - v), (v_2 - v), \dots, (v_n - v)\}$ es linealmente dependiente.

13. Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de funciones con las operaciones usuales. Determinar si los siguientes conjuntos son LI.

$$a)\quad \left\{\sin(x),\ e^x,\ x^2\right\} \qquad b)\quad \{\cos(x),\ \cos(x+1),\ \cos(x+2).\}$$

14. Probar que el conjunto $\{x^k : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en el espacio vectorial de los polinomios $\mathbb{R}[x]$.

15. Probar que el conjunto $\{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\}$ es LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $[0, 2\pi]$ a $\mathbb{R}$.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1: una parte por cada espacio vectorial
- Ejercicio 2: tres partes
- Ejercicio 3
- Ejercicio 5
- Ejercicio 6
- Ejercicio 7
- Ejercicio 8: dos partes
- Ejercicio 10
- Ejercicio 11
- Ejercicio 13: dos partes