Aplicaciones de Álgebra Lineal
Primer Parcial 2024
30/9/2024

Ejercicio 1 (P) Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Sea λ valor propio de A asociado al vector propio $v \in \mathbb{C}^n$: $A.v = \lambda.v$ y sea $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $|v_{i_0}| \geq |v_i|$, para todo $1 \leq i \leq n$. Probar $|\lambda|.|v_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^{j=n} |a_{i_0 j}|.|v_{i_0}|$.

b. Demuestre que $\rho(A) \leq \text{máx}\{\sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| \ : \ i = 1, ..., n\}$.

c. Demuestre que también vale que $\rho(A) \leq \text{máx}\{\sum_{i=1}^{i=n} |a_{ij}| \ : \ j = 1, ..., n\}$.

Ejercicio 2 (T) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y J_A la matriz de Jordan asociada a A. Probar que

$$\lim_{s\to+\infty} \sqrt[s]{||A^s||} = \lim_{s\to+\infty} \sqrt[s]{||J_A^s||}$$

Ejercicio 3

a. i) Consideramos $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donde $B = J(1) = \bigoplus_{i=1}^{i=t} J_{n_i}(1)$, con $n_i \in \mathbb{N}$, para todo $1 \leq i \leq t$.

O sea, B es una matriz con 1 como único valor propio, la cual ya está expresada en su forma de Jordan.

Si $n \leq 7$ y $\dim(\ker(B - I)^3) = 6$, calcular todas las opciones posibles para t y para los n_i, $1 \leq i \leq t$.

ii) Si además se sabe que $(B^h)_{h\in\mathbb{N}}$, converge, determine B.

b. Describir todas las posibles formas de Jordan de $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$, sabiendo que:

- $(x-1)^3$ divide a $m_A(x)$, el polinomio minimal de A;
- $\dim(\ker(A - I)^3) = 6$;
- $1 + i$ es valor propio de A;
- $\rho(A) = 3$;
- $\det(A) = 6$.