.

N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

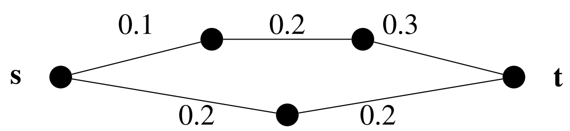
Respuestas

Conteste en estas columnas				**Deje estas columnas en blanco**			
Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8

- El parcial dura 3 horas y es sobre un total de 40 puntos.
- Los ejercicios de desarrollo valen 6 puntos c/u, los de opción múltiple valen 4 puntos, -1.25 puntos y 0 puntos según la respuesta sea correcta, incorrecta o en blanco respectivamente.
- Los resultados se truncan al cuarto decimal (p.ej. 0,12349 o 0,12341 se toman como 0,1234).
- En cada ejercicio múltiple opción hay una sola opción correcta.

Múltiple Opción (Total: 16 puntos)

Ejercicio 1



La red de la figura consiste en dos ramas que une una fuente s con un destino t. La primer rama consta de tres cables con probabilidad de falla de 0.1, 0.2 y 0.3 mientras que la segunda rama consta de dos cables con probabilidad de falla de 0.2 c/u. Si los cinco cables funcionan en forma independiente, ¿cuál es la probabilidad de que la energía llegue de s a t?

(A) 0,5040 **(B)** 0,8214 **(C)** 0,6400 **(D)** 0,3225

Solución: Si A es el suceso que funcione la primer rama y B el suceso que funcione la segunda, entonces $A \cup B$ es el suceso de que se suministre energía, cuya probabilidad será

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

que por la independencia queda

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 + 0.8 \times 0.8 - 0.9 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.8 \times 0.8 = 0,8214$$

Ejercicio 2

Se tienen tres urnas A, B y C, con seis bolas cada una. En cada urna hay dos bolas rojas, dos verdes y dos amarillas. Se extrae una bola de la urna A y otra de la urna B, ambas bolas se depositan en la urna C y luego se extraen sin reposición dos bolas de la urna C. Hallar la probabilidad de que las dos bolas extraídas de la urna C sean del mismo color.

(**A**) $0,0873$ (**B**) $0,2619$ (**C**) $0,1180$ (**D**) $0,3541$

Solución:

Primero calcularemos la probabilidad de que ambas bolas sean rojas. El resultado lo multiplicaremos por tres por simetría. La probabilidad de extraer dos bolas rojas depende de la cantidad de bolas rojas que haya en la urna C. Dicha cantidad puede ser $2,3$ o 4. Para que hayan 2 no debo haber extraído ninguna bola roja de las urnas A y B, lo cual sucede con probabilidad $(4/6)^2$. Para que hayan 3 debo haber extraído una roja de una de las urnas y otra de otro color de la otra urna, lo cual sucede con probabilidad $2(2/6)(4/6)$. Para que hayan 4 debo haber extraído una bola roja de c/u las urnas A y B, lo cual sucede con probabilidad $(2/6)^2$. Por lo tanto, por la fórmula de la probabilidad total, la probabilidad de extraer dos bolas rojas es

$$P_R = \left(\frac{4}{6}\right)^2 \frac{C_2^2}{C_2^8} + 2\frac{2}{6}\frac{4}{6}\frac{C_2^3}{C_2^8} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{C_2^4}{C_2^8} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{C_2^2}{C_2^8} + 2\frac{2}{6}\frac{4}{6}\frac{C_2^3}{C_2^8} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \frac{C_2^4}{C_2^8} = 0,0873$$

Por lo que la probabilidad es (truncando en el cuarto decimal) $P = 3P_R = 0,2619$

Ejercicio 3

La probabilidad de que al tirar seis dados la suma sea menor a 35 es:

(**A**) 0,9814 (**B**) 0,9961 (**C**) 0,0002 (**D**) 0,9998

Solución: La mayor suma posible es $35+1$, por lo que es más fácil considerar el complemento. La probabilidad de que sea 35 o más es la probabilidad de que sea 35 o $35+1$. Los casos posibles para que sea 35 son seis, mientras que hay solo un caso posible para que sea $35+1$. La cantidad de casos posibles es 6^6de modo que la probabilidad es (truncando en el cuarto decimal)

$$1-(6+1)/6^6 = 0,9998$$

Ejercicio 4

El 16% de los que acceden a cierta página web son menores. La probabilidad de que un menor cliquee en cierto link de dicha página es del 90% mientras que la probabilidad de cliquear dicho link si no es menor es del 40%. Hallar la probabilidad de que un usuario sea menor si cliqueo el link.

(A) 0,6315 **(B)** 0,2347 **(C)** 0,1440 **(D)** 0,3000

Solución: Llamemos C al suceso de clickear sobre el link y M el suceso de ser menor. Entonces queremos calcular $\mathbb{P}(M|C)$ sabiendo que $\mathbb{P}(M) = 0.16, \mathbb{P}(C|M) = 0.9$ y $\mathbb{P}(C|M^c) = 0.4$.

$$\mathbb{P}(M|C) = \frac{\mathbb{P}(C|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{0.9 \times 0.16}{0.9 \times 0.16 + 0.4 \times 0.84} = 0,3000$$

Ejercicios de Desarrollo (Total: 24 puntos)

Ejercicio 5

Asumiendo que la cantidad de autos que llegan por minuto a un peaje sigue una distribución Poisson y que la probabilidad de que lleguen tres autos en un minuto es el doble de la probabilidad de que lleguen diez autos en un minuto, calcular la probabilidad de que no llegue ningún auto en un minuto.

Solución: Tenemos que la probabilidad de que lleguen i autos en un minuto es $e^{-\lambda}\lambda^i/i!$, entonces $e^{-\lambda}\lambda^3/3! = 2e^{-\lambda}\lambda^{10}/10!$, de donde $\lambda^7 = (10!/3!)/2$ y (truncando en el cuarto decimal) $\lambda = 6,0665$, de donde la probabilidad de que no llegue ningún auto en un minuto es $e^{-6,0665} = 0,0023$.

Ejercicio 6

Se considera la variable aleatoria X absolutamente continua con densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ a & \text{si } x \in [1,3], \\ be^{-x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

1) Hallar a y b para que $P(X < 3) = P(X > 3)$.
2) Hallar $P(X < 6)$.
3) Hallar la función de distribución F_X de X.

Solución: 1) Como $P(X < 3) = P(X > 3)$, tenemos $\int_{-\infty}^{3} f_X = \int_{3}^{+\infty} f_X$, de donde $2a = b\int_{3}^{+\infty} e^{-x}dx$. Por otra parte, como f_X es una densidad, tenemos que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X = 1$, o sea que $2a + b\int_{3}^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

De allí obtenemos que $a = 1/4$ y $b = 1/(2c)$, siendo $c = \int_{3}^{+\infty} e^{-x}dx$.

Basta hallar c: $c = \int_{3}^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_{3}^{+\infty} = e^{-3}$, de donde $b = e^3/2$.

2) $P(X < 6) = 1/2 + (e^3/2)[-e^{-x}]_3^6 = 1/2 + (e^3/2)[-e^{-6} + e^{-3}] = 1 - e^{-3}/2 = 0.9751$(truncando al cuarto decimal).

3) La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ a\int_1^x dt & \text{si } x \in [1,3], \\ a(3-1) + b\int_3^x e^{-t}dt & \text{si } x > 3. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ (x-1)/4 & \text{si } x \in [1,3], \\ 1/2 + (e^3/2)[-e^{-x} + e^{-3}] & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ (x-1)/4 & \text{si } x \in [1,3], \\ 1 - e^{3-x}/2 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Ejercicio 7

Los tiempos de vida (en años) de dos chips A y B siguen distribuciones exponenciales con parámetros 1 y 3 respectivamente. Si ambos funcionan independientemente calcule la probabilidad de que el chip A dure más que el B.

Solución: Modelamos el problema con dos v.a. X,Y con distribución exponenciales de parámetros 1 y 3. Nos piden $\mathbb{P}(X > Y)$, de donde debemos calcular la probabilidad de que el vector (X,Y) caiga en el semiplano $x > y$. Como las variables son independientes tenemos que

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-x} 3e^{-3y} & x,y > 0, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

De donde

$$\mathbb{P}(X > Y) = \iint_{x>y} f_{X,Y}(x,y) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^x e^{-x} 3e^{-3y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-3y}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[-e^{-3x} + 1\right] dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} - e^{-4x} dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1} - \frac{e^{-4x}}{-4}\right]_0^{+\infty} = \left[1 - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 8

Se consideran dos variables aleatorias discretas X y Y cuya función de probabilidad conjunta viene dada por la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3
-1	0,11	0,22	0,13
1	0,24	a	0,14

1. Calcular la probabilidad de que $Y = 2$.
2. Calcular la probabilidad de que $Y > 1$ dado que $X + Y \leq 2$.
3. ¿Son X e Y independientes? justifique su respuesta.

Solución:

1. La probabilidad de que $Y = 2$ es $0,22 + a$, como la suma de las probabilidades puntuales debe ser 1, entonces a tiene que valer 0.16, de donde $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.38$.
2. La probabilidad de que $Y > 1$ dado que $X + Y \leq 2$, es $\mathbb{P}(Y > 1, X + Y \leq 2) / \mathbb{P}(X + Y \leq 2) = 0.35/0.7 = 1/2$.
3. $\mathbb{P}(Y = 2 | X = -1) = 0,22/0,46 = 0,4782 \neq 0.38$, por lo tanto no son independientes.