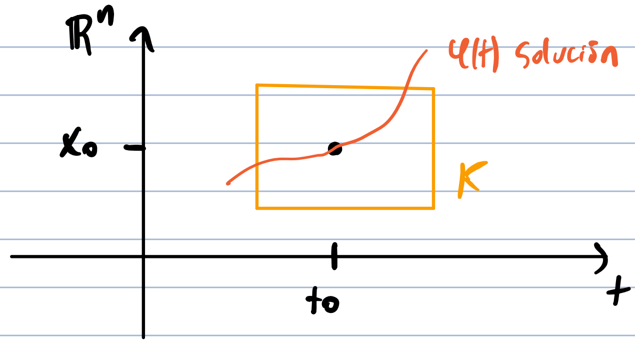
Teo de escape de compactos :

$(*) \begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

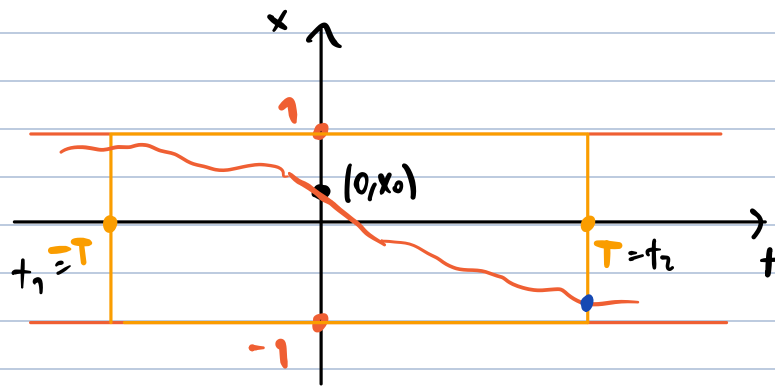
- dominio de $f = \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ región abierta.
- y $K \subset \Omega$ un compacto, $(t_0,x_0) \in K$.
- f en cond. del teo. de Picard

Entonces la solución a $(*)$ se escapa de K.



7) $(*) \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- Veamos que si $x_0 \in (-1,1)$, la solución maximal con esa cond inicial está def para todo tiempo.



[Observar que $x(t) \equiv 1$ cte
y $x(t) \equiv -1$ cte
son soluciones]

Queremos probar que la soluc. maximal al problema $(*)$ está def en $\mathbb{R}$.

Justificamos con Teo escape de comp.

Consideramos el compacto $[-T,T]\times[-1,1]$.

Por teo de escape de compactos $\exists t_1 < 0$, $\exists t_2 > 0$ tq, si φ es la solución maximal entonces

$$\varphi(t_1) \in \partial K, \quad \varphi(t_2) \in \partial K.$$

$(*)$ Observar que necesariamente $t_2 = T$, $t_1 = -T$, de lo contrario tendríamos que $\varphi(t_2) = 1$ o $\varphi(t_2) = -1$, que contradice la unicidad de Picard.

Concluimos que $\forall T$ "$\exists\, \varphi(T)$", es decir φ definida en $\mathbb{R}$.

$$(t_2, \varphi(t_2)) \in \partial K \cap \{(t,x) : t \geq 0\} = \underbrace{\cancel{\left([0,T]\times\{-1\}\right)}}^{\text{piso}} \cup \overbrace{\left(\{T\}\times(-1,1)\right)}^{\text{pared}} \cup \overbrace{\cancel{\left([0,T]\times\{1\}\right)}}^{\text{techo}}$$

Necesariamente $(t_2, \varphi(t_2)) \in \{T\} \times (-1,1)$.

Es decir $t_2 = T$ y $\varphi(T) \in (-1,1)$.

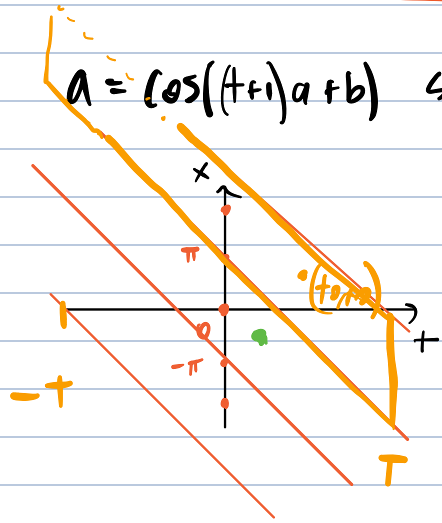
$[\, x(t) = -t + \pi + 2n\pi, \quad x'(t) = -1 = \cos(\pi + 2n\pi) = \cos(t - t + \pi + 2n\pi) = \cos(t+x) \,]$

8) $\dot{x} = \cos(t+x)$

a) Buscar soluc. de la forma $x(t) = at+b$ → $\dot{x}(t) = a$

$\dot{x}(t) = \cos(t+at+b) = \cos(t(a+1)+b)$

$a = \cos((t+1)a+b)$ sii $a = -1$, $b = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$



ejercicio) Buscar y probar que hay simetrías en las soluc.

b) Probar que todas las soluc. maximales están def. para todo tiempo

Dada (t_0,x_0) cond inicial y φ soluc maximal tomamos K el compacto formado por dos segm de recta de las rectas $-t+(2n+1)\pi$ y $-t+(2n+3)\pi$ y dos segm verticales con coord en t iguales a $-T$ y T.

Mismo argumento que ejercicio pasado prueba que $[-T,T] \subset \operatorname{dom}\varphi$

Como T arbitrariamente grande, $\mathbb{R} = \operatorname{dom}\varphi$.

c) Hallar máx, min y ptos de inflexión

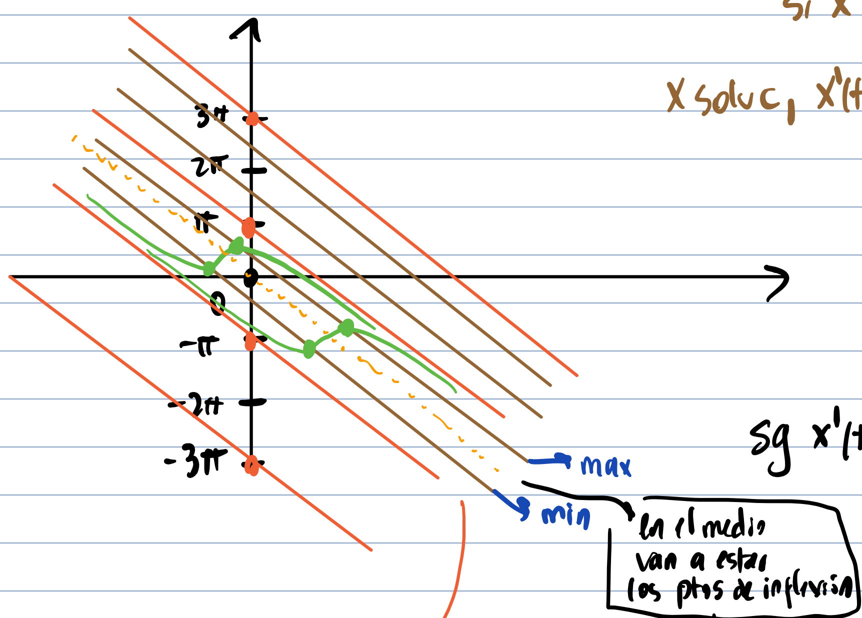
Si x solución, $x'(t) = \cos(t+x)$

x soluc, $x'(t) = 0$ sii $\cos(t+x) = 0$

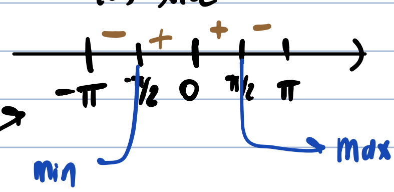
sii $(t+x) = \frac{\pi}{2} + n\pi$

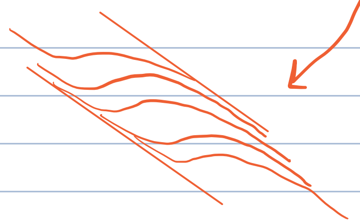
sii $x = -t + \frac{\pi}{2} + n\pi$.

aquí se anula la derivada de las soluc.



sg $x'(t)$





si x es solución, estudio $x''(t) = (\cos(t+x))'$
$= -\operatorname{sen}(t+x)$

$x''(t) = 0$ sii $x(t) = -t + n\pi$.