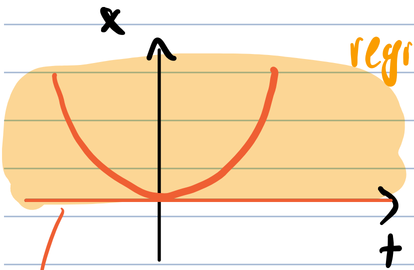
Pract 4 $\longrightarrow$ Teor. importantes :
- Teo Picard (existencia y unicidad)
- Teo escape de compactos.

ej 2) Si $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ y f de clase C^1 $\Rightarrow$ f está en hipótesis de Picard (loc Lipschitz en variable x)

- f lipsch $\rightarrow$ f continua ($\Leftarrow$ falso)
- f clase C^1 $\rightarrow$ f lipschitz ($\Leftarrow$ falso)

ej 3) (*) $\begin{cases} \boxed{\dot{x} = x^{1/2}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ · En este contexto $f(t,x) = x^{1/2}$ ($f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$).

var sep. asumiendo $x \neq 0$



$\dot{x} . x^{-1/2} = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right) x^{1/2} = t + c$

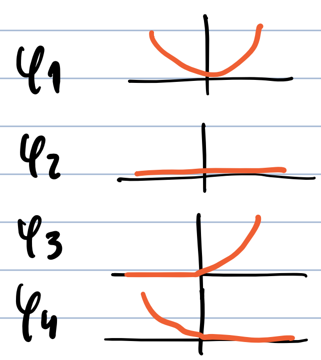
$x^{1/2} = 2t + 2c$

$x = (2t + 2c)^2$

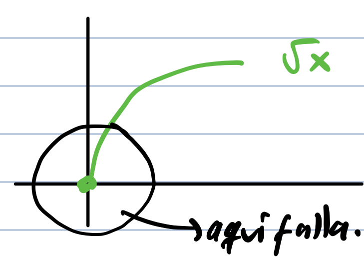
Si impongo $x(0) = 0$ $\Rightarrow$ $x(0) = (2c)^2 = 0$
$\Rightarrow c = 0$

- Por lo tanto $x(t) = (2t)^2$ es solución de (*).

Observar que existe 4 soluc maximales al problema (*) que llamamos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ y ambas tienen dominio maximal $\mathbb{R}$



Todas verifican (*), definidas en $\mathbb{R}$ (y por lo tanto maximales)



Obs : $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ no es loc. lipschitz en 0!

f en el dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ no cumple las cond del teorema de Picard.

Observar que f restricta a cualquier subregión de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ que no tenga ptos con $x = 0$, si verifica las hip. de Picard.

5) • f_1, f_2 de clase C^∞ def en $\mathbb{R}^2$

• Supongamos que $f_1(t,x) < f_2(t,x)$

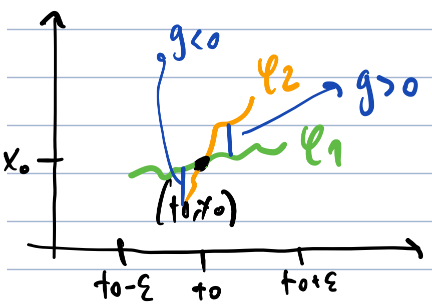
• Llamamos φ_1 a la soluc maximal de $*_1$
φ_2 a la soluc maximal de $*_2$

$*_1 \begin{cases} \dot{x} = f_1(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$*_2 = \begin{cases} \dot{x} = f_2(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

En part $\varphi_2(t_0) = \varphi_1(t_0)$. Veamos que si $t > t_0$, $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$

Prueba:

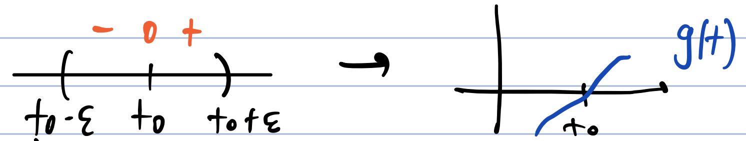


Definimos $g(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ la diferencia entre las funciones. Veamos $g(t) > 0$ si $t > t_0$.

Como $g'(t_0) = \varphi_2'(t_0) - \varphi_1'(t_0) = f_2(x_0,t_0) - f_1(x_0,t_0) > 0$

se tiene que g es localmente mon. creciente estricta en t_0

En particular sg g



Por lo tanto si $t \in [t_0, t_0+\varepsilon)$ sabemos que $g(t) > 0$.

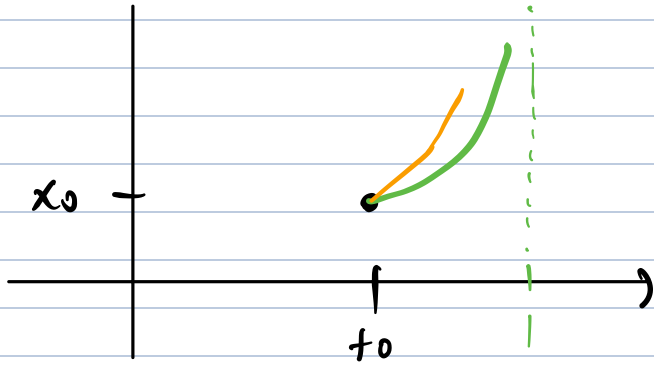
Asumimos raz por absurdo que en algún momento g toma un valor negativo. Esto implica que existe un primer $\hat{t}$ tq $\hat{t} > t_0$ y $g(\hat{t}) = 0$

Si $g(\hat{t}) = 0 \Rightarrow \varphi_2(\hat{t}) = \varphi_1(\hat{t}) \Rightarrow g'(\hat{t}) = f_2(\varphi_2(\hat{t}), \hat{t}) - f_1(\varphi_1(\hat{t}), \hat{t}) > 0$

Pero si $g'(\hat{t}) < 0$ entonces $g(\hat{t}-\varepsilon) < 0$ Abs, pues dijimos que $\hat{t}$ era el primer valor donde $g(t)$ se anulaba.

Entonces $\forall t > t_0$ $g(t) > 0$.

b) $\begin{cases} \dot{x} = t^2 + x^2 = \underline{f_2(t,x)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x} = x^2 = \underline{f_1(t,x)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\rightarrow$ Las soluc de esta explotan en tiempo finita



Si la chica explota en tiempo finito, la amarilla también.