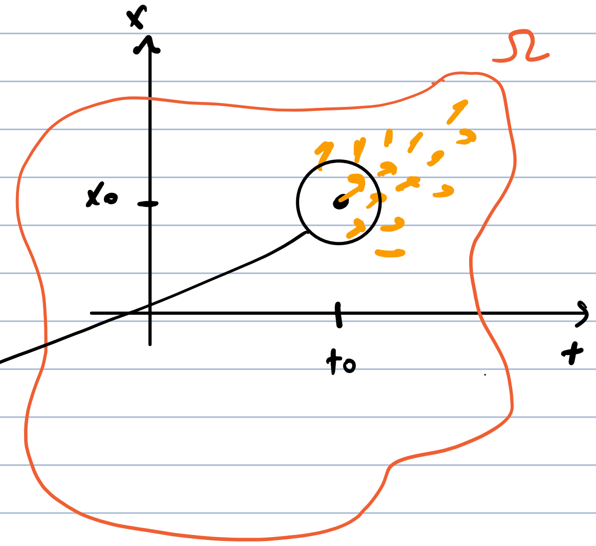
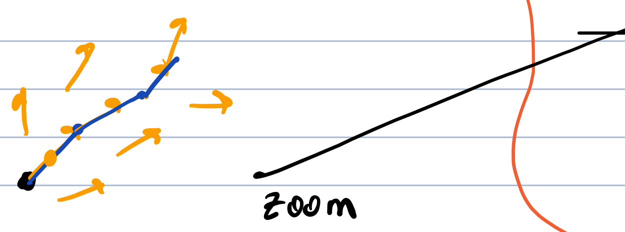
Práct 4.

$$\begin{cases}\dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0\end{cases}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.

abierto





método iterativo para conseguir una solución: aproximamos por poligonales.

· El teo de Picard da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluc. locales.

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde f es loc. Lipschitz en la variable espacial

Ejercicio 1) : Este ejercicio da una idea de la dem de Picard.

· $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0\end{cases}$ $x(t)$ es solución de este sistema sii $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds.$

$x(t_0) = x_0$

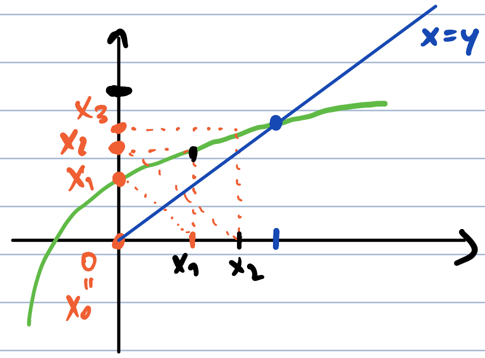
$x'(t) = f(t, x(t))$

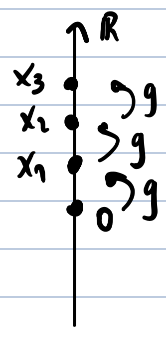
$$y(t) \xrightarrow{T} x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds.$$

↳ x es solución sii $T(x) = x$.

$\left(T(y)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds \right)$

a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua, $x_0 = 0$, $x_1 = g(0)$, $x_2 = g(g(0)) = g(x_1)$, $x_3 = g(x_2)$, ..., $x_n = g(x_{n-1})$.





Asumimos $\boxed{x_n \longrightarrow x_\infty}$

Veamos que x_∞ es fijo. $\left(g(x_\infty) = x_\infty \right)$.

$\lim_n x_n = x_\infty.$ $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \lim_n f(x_n) = f(x_\infty) \\ \lim_n \text{"}x_{n+1}\text{"} = x_\infty. \end{array}\right\}$ $f(x_\infty) = x_\infty.$

b). El método iterativo de Picard consiste en tomar

$x_0(t) = x_0$ cte.
$x_1(t) = T(x_0)$
$x_2(t) = T(x_1)$
$\vdots$
$x_n(t) = T(x_{n-1})$

Con las hipótesis del teo de Picard se prueba que $x_n \longrightarrow x_\infty$

Por lo tanto $T(x_\infty) = x_\infty$.
Es decir, x_∞ es solución

Estudiamos el caso $\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = 1 \end{cases}$

Buscamos solución con este método en un intervalo $[0,\varepsilon)$

- $x_0(t) = 1$ cte.
- $x_1(t) = T(1) = x_0 + \int_0^t f(s, x_0(s))\,ds = 1 + \int_0^t a\,ds = 1 + at.$
- $x_2(t) = T(x_1) = 1 + \int_0^t a(1+as)\,ds = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2}$
- $x_3(t) = T(x_2) = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + \frac{a^3t^3}{3!}$

$\vdots$

- $x_n(t) = 1 + at + \cdots + \frac{(at)^n}{n!}$

Observar que x_∞ existe y es $x_\infty(t) = \sum_0^\infty \frac{(at)^i}{i!} = e^{at}$

x_∞ es la solución! (en part $T(x_\infty) = x_\infty$).

$\longrightarrow$

¿Qué onda con las hipótesis?

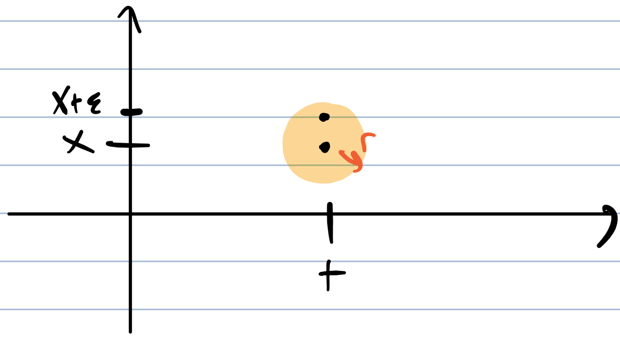
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lipschitz si $|f(x) - f(y)| < k|x-y|$. para cierto $k > 0$. $(\forall x, y)$.
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es loc. Lipschitz en x si $\exists r > 0$ y $k > 0$ tq $\forall y \in B(x,r)$ $|f(x) - f(y)| < k|x-y|$.

(decimos que f es loc. Lipschitz si lo es para todo x).

→ ⊙ $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (t,x) es [loc. Lipschitz en var. espacial] si $\forall (t,x)\ \exists r, K$ tq $\forall y \in B(x,r)$ | $|f(t,x) - f(t,y)| < K|x-y|$

2) •) Veamos que si f es de clase C^1 entonces es loc. Lipschitz según var. espacial.

Fijamos (t,x) en dominio de f. Buscamos r y K que verifiquen la def



$$|f(t,x) - f(t,x+\varepsilon)| < K\varepsilon$$

sii $\dfrac{|f(t,x) - f(t,x+\varepsilon)|}{\varepsilon} < K$.

Observar que $f(t,x+\varepsilon) = f(t,x) + D_{(t,x)}f\,|(0,\varepsilon) + \text{resto}$

$= f(t,x) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\cdot\varepsilon + \text{resto}$.

Sustituyendo: $\dfrac{|f(t,x) - f(t,x+\varepsilon)|}{\varepsilon} = \dfrac{\left| f(t,x) - f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\cdot\varepsilon + \text{resto}\right|}{\varepsilon}$

$\leq \underbrace{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|}_{\leq M} + \underbrace{\dfrac{|\text{resto}|}{\varepsilon}}_{<1} \leq K$.

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ es continua en $\overline{B((t,x),1)}$

$\Rightarrow$ tiene máx M.

Además $\dfrac{|\text{resto}|}{\varepsilon}$ achicando r es tan* chico como queramos. → tomando r chico tenemos $\dfrac{|\text{resto}|}{\varepsilon} < 1$

→ Alcanza con tomar r chico (como acá *) y $K = M+1$

•) $f(t,x) = t + |x|$ no es derivable en los ptos $(t,0)$. Pero es loc. Lipschitz en dichos ptos.

discutir según signos.

$$|f(t,x) - f(t,y)| = |t + |x| - t - |y|| = ||x| - |y|| \leq 1.|x-y|.$$

3) $\begin{cases} \dot{x} = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

¡ $f(x) = \sqrt{x}$ no es loc. lipschitz en 0!.