Caso que falta : $X' = AX$ con $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con vap complejos $\lambda = a+ib$ y $\bar{\lambda}$.

- Caso canónico : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, las soluc. son $(x(t), y(t)) = r_0 e^{at}\left(\cos(-bt+\theta), \operatorname{sen}(-bt+\theta)\right)$

- En otro caso, A es semejante al formato de arriba

¿Quién es la matriz cambio de base? Si V_λ es vect. propio asociado a λ se tiene $V_\lambda = (Re(V_\lambda), Im(V_\lambda))$

Considerando la matriz $P = \left(Re(V_\lambda), Im(V_\lambda)\right)$ se verifica que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (donde $\lambda = a+ib$).

$A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \rightsquigarrow V_\lambda \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$

Ejemplo: $V_\lambda = (2+3i, 1-i)$

$\begin{cases} Re(V_\lambda) = (2,1) \\ Im(V_\lambda) = (3,-1) \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' = x(\varepsilon - (x^2+y^2)) - y = x\varepsilon - y - x(x^2+y^2) \\ y' = y(\varepsilon - (x^2+y^2)) + x = x + y\varepsilon - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\varepsilon - y \\ y' = x + y\varepsilon \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} x(t) &= r_0 e^{\varepsilon t}\cos(-t+\theta_0) \\ y(t) &= r_0 e^{\varepsilon t}\operatorname{sen}(-t+\theta_0) \end{aligned}$$

- aprox bien → Si $\varepsilon > 0$, el $(0,0)$ es pto de eq. inestable
- aprox bien → Si $\varepsilon < 0$, el $(0,0)$ es pto de eq estable
- aprox. mal → Si $\varepsilon = 0$, el $(0,0)$ es pto de eq estable (no asint. estable)

- **Teorema** (aproximación lineal): $X' = F(X)$ ec. no lineal, $\vec{x}_0$ pto de equilibrio

Si $A = \text{Jac}_{\vec{x}_0}(F)$, la parte real de los vaps de A son no nulos,

entonces $X' = F(X)$ es bien aproximada por $X' = AX$ cerca de $\vec{x}_0$.

esto necesita mayor precisión, pero por el momento la info que necesitamos es que en estas hipótesis, la naturaleza del crítico $\vec{x}_0$ es la misma que en el caso lineal

---

Pract 4

Vamos a ponernos finos con la teoría:
- ¿existen soluc?
- ¿dónde están def. las soluciones?
- ¿las soluc. son únicas?
- ¿Por cuánto tiempo están def?

- **Teo de Picard**: $X' = F(t,X)$ con $F: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω abierto.

Si F cumple que es localmente Lipschitz en la variable espacial.*

Entonces el problema $\begin{cases} X' = F(t,X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ con $(t_0, x_0) \in \Omega$ admite una soluc local única: $\exists\, \varepsilon > 0$ para el cual $\exists\, \varphi : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ tq $\begin{cases} \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = X_0 \end{cases}$

F es localmente Lipschitz en var. espacial si $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$, $\exists\, r > 0$, $\exists\, K > 0$ tq si $(t_0, x_1) \in \Omega$, $(t_0, x_1) \in B((t_0, x_0), r) \Rightarrow \|F(t_0, x_1) - F(t_0, x_0)\| < K \|x_1 - x_0\|$

$(u, v) = \bar{P}^{-1}(x, y)$.

$[(u_0, v_0) = \bar{P}^{-1}(x_0, y_0)]$