PRIMER PARCIAL de CDIV - Segundo semestre 2024 - Versión 1
Viernes **27** de setiembre de 2024

Nro de lista	Cédula	Apellido y nombre	Firma

- El puntaje total es 40 puntos.
- La duración del parcial es de 3 horas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.
- **Se debe entregar la hoja de escáner y las hojas de la propuesta con todos los campos completos.**
- Al completar los campos en la hoja de escáner, pintar (con lapicera) correctamente dentro de los círculos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Respuestas

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Llenar cada casilla con la respuesta **A,B,C,D, E ó F** según corresponda.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8

Notación:

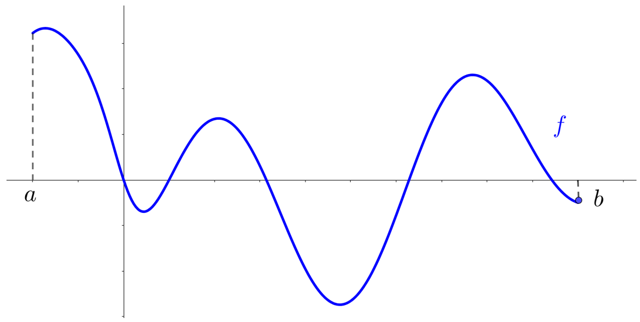
En el parcial se usa la siguiente notación:

- $E(x, r)$ denota el entorno real de centro x y radio r.
- $E^*(x, r)$ denota el entorno reducido real de centro x y radio r.
- $S^*(f, P)$ denota la suma superior de f con respecto a la partición P.
- $S_*(f, P)$ denota la suma inferior de f con respecto a la partición P.
- $\sup(A)$ denota al supremo del conjunto A.

página en blanco

Ejercicio 1

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función continua cuyo gráfico se da en la imagen.



Consideremos el conjunto $A = \{x \in [a, b] \ / \ f(x) > 0\}$ y sea $\alpha = \sup(A)$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) f es inyectiva, es sobreyectiva y $f(\alpha) = 0$.
B) f es inyectiva, no es sobreyectiva y $f(\alpha) = 0$.
C) f no es inyectiva, es sobreyectiva y $f(\alpha) = 0$.
D) f no es inyectiva, no es sobreyectiva y $f(\alpha) \neq 0$.
E) f no es inyectiva, no es sobreyectiva y $f(\alpha) = 0$.
F) f es inyectiva, es sobreyectiva y $f(\alpha) \neq 0$.

Ejercicio 2

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables de las cuales se sabe:

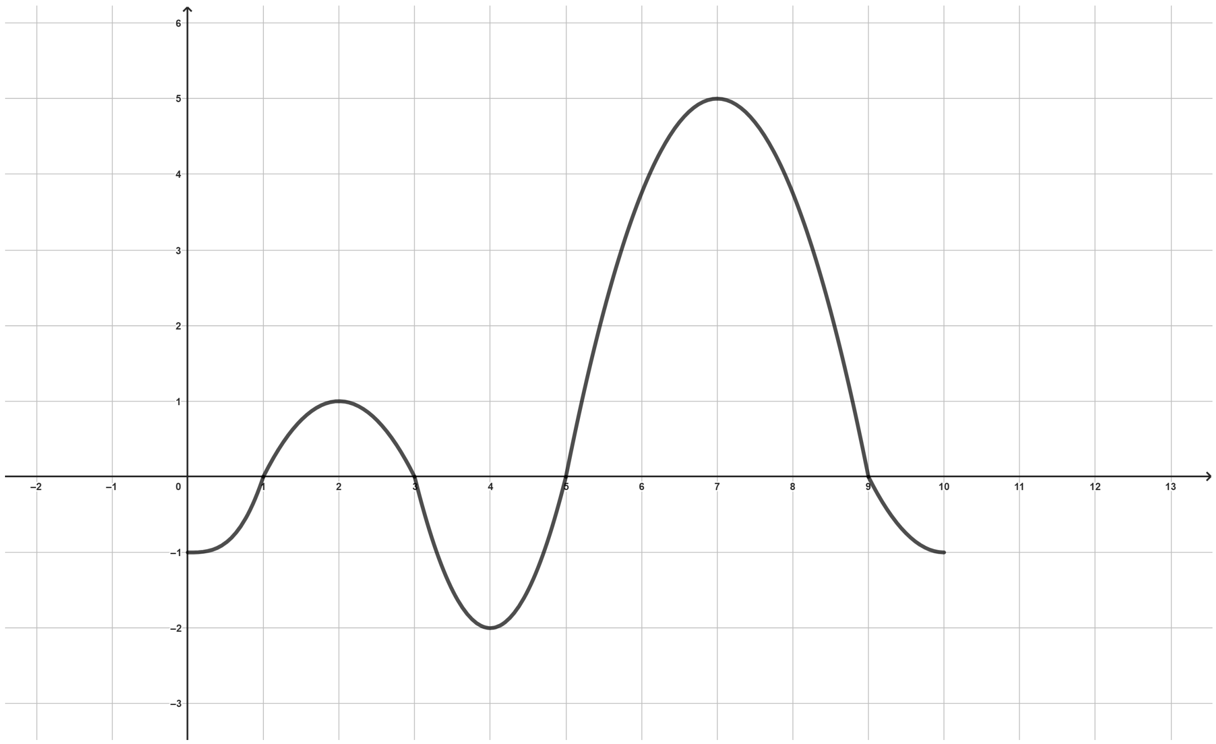
$$\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = 6; \qquad \int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 4; \qquad \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3$$

Indicar el valor de $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2}{3}f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$

A) $-\frac{5}{3}$	C) $-\frac{1}{3}$	E) $\frac{5}{3}$
B) -1	D) 1	F) $\frac{13}{3}$

Ejercicio 3

Sea $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ la función cuyo bosquejo se muestra en la siguiente figura. Cada cuadrado tiene lado 1.



Para la partición $P = \{0, 1, 2, 4, 9, 10\}$ del intervalo $[0, 10]$ el valor de $S^*(f, P)$ es:

A) 27 C) 29 E) 25
B) 28 D) 23 F) 20

Ejercicio 4

Consideremos la función $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ y la partición $P_n = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ del intervalo $[1, 2]$ que divide al intervalo $[1, 2]$ en n intervalos de igual longitud.

Indicar el mínimo valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \frac{1}{2}$.

A) $n = 7$ C) $n = 9$ E) $n = 5$
B) $n = 8$ D) $n = 6$ F) $n = 4$

Ejercicio 5

Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.

Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

A) f es integrable, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.
B) f es integrable, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y no existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.
C) f es integrable, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.
D) f no es integrable, existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.
E) f no es integrable, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.
F) f no es integrable, no existe P partición de $[0, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$ y no existe Q partición de $[0, 2]$ tal que $S_*(f, Q) = 3$.

Ejercicio 6

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. El límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2}$,

A) no existe
B) existe y es igual a 0
C) existe y es igual a $\frac{1}{2}$
D) existe y es igual a 1
E) existe y es igual a $+\infty$
F) existe y es igual a $-\infty$

Ejercicio 7

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x$. Sabemos que la función tiene límite en $x = 1$ y vale 2, es decir que se cumple que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{3}$ sabemos que

$$\boxed{\text{existe un } \delta > 0 \text{ tal que para todo } x \in E^*(1,\delta) \text{ se cumple que } f(x) \in E(f(1),\varepsilon).}$$

Indicar el *máximo* valor de δ que cumple con lo que dice el recuadro.

A) $\delta = \frac{1}{6}$
B) $\delta = \frac{1}{3}$
C) $\delta = \frac{1}{4}$
D) $\delta = \frac{1}{5}$
E) $\delta = \frac{2}{3}$
F) $\delta = \frac{1}{2}$

Ejercicio 8

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right), & \text{si } x \neq 1, \\ a, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta.

A) f es continua si $a = \frac{\pi}{4}$.
B) f es continua si $a = \frac{\pi}{2}$.
C) f es continua si $a = -\frac{\pi}{4}$.
D) f es continua si $a = -\frac{\pi}{2}$.
E) f es continua para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
F) No existe $a \in \mathbb{R}$ tal que f sea una función continua.

SOLUCIÓN

Ejercicio 1

f no es inyectiva, no es sobreyectiva y $f(\alpha) = 0$ (la demostración de esto último es la del teorema de Bolzano).

Ejercicio 2

$$\frac{2}{3}\int_1^4 f - \int_1^4 g = \frac{2}{3}(6-4) - 3 = -\frac{5}{3}$$

Ejercicio 3

$S^*(f, P) = 0 + 1 + 2 + 25 + 0 = 28$

Ejercicio 4

$$S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) = \frac{(2-1)}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{1}{n}(f(2) - f(1)) = \frac{3}{n}.$$

Luego, $\frac{3}{n} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6 < n$, así que tomamos $n = 7$.

Ejercicio 5

- f es monótona en el intervalo $[1, 2]$, por lo tanto es integrable.
- $\int_1^2 f(x)dx =$ Área del triángulo $= 4$.
- No hay forma de aproximar por arriba al triángulo por una unión finita de rectángulos, por lo tanto, no existe P partición del intervalo $[1, 2]$ tal que $S^*(f, P) = 4$.
- Basta con tomar, por ejemplo, $Q = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ (pero no es la única Q que lo cumple).

Ejercicio 6

$\frac{1}{2} \leq f(t) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x \leq F(x) \leq x \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}x}{x^2} \leq \frac{F(x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{F(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x}$. Luego, entonces existe el límite y vale 0.

Ejercicio 7

Buscamos $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 2| < \varepsilon$ si $|x - 1| < \delta$, pero

$$|f(x) - 2| = |2x - 2| = 2\,|x - 1| < 2\delta = \varepsilon \text{ si } \delta = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 8

El único problema de continuidad que tiene f es en $x = 1$, así que basta con estudiar la continuidad en ese punto.

- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1)\sin\left(\frac{2x}{x-1}\right) + \frac{\pi}{4}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right) = 0 + \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$.
- $f(1) = a$

Así que tiene que ser $a = \frac{\pi}{2}$.
