Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística **Segundo semestre 2024**

PRIMER PARCIAL - 24 DE SETIEMBRE DE 2024 - VERSIÓN 1

Verdadero o Falso

1. Existen $A_3^6 = 120$ subconjuntos $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ de cardinal 3.
Respuesta: Falso. Como el orden de los elementos en un conjunto no importa, la respuesta correcta es $C_3^6 = 20$.

2. Hay exactamente 64 listas binarias (o sea, formadas por ceros y unos) de largo 8 que comienzan y terminan en 1. Recuerde que en las listas el orden de los elementos importa.
Respuesta: Verdadero. Quedan exactamente 6 lugares por determinar en la lista, cada uno de los cuales puede ser 0 o 1 (2 posibilidades), por la regla del producto tenemos $2^6 = 64$ posibilidades.

3. En una comisión de 10 integrantes hay 5 hombres y 5 mujeres. La cantidad de formas de seleccionar un grupo de 6 personas de esa comisión con 2 hombres y 4 mujeres es $C_2^5 + C_4^5 = 15$.
Respuesta: Falso. Es un proceso de dos pasos, primero podemos seleccionar los hombres de C_2^5 formas y segundo podemos seleccionar las mujeres de C_4^5 formas. Por la regla del producto la respuesta es $C_2^5 \cdot C_4^5 = 50$.

4. Existen exactamente $S(7, 3)$ palabras de 7 letras que pueden formarse usando las letras A, B y E (donde se puede repetir letras y se usan todas las letras). Recuerde que $S(n, k)$ denota los números de Stirling de segundo tipo
Respuesta: Falso. Como el orden de las letras en las palabras importa, la respuesta correcta es $Sob(7, 3)$ (los objetos serían cada una de las 7 posiciones en la palabra y los recipientes serían cada una de las tres letras disponibles A, B y E) y $Sob(7, 3) = S(7, 3) \cdot 3! > S(7, 3)$.

5. Si una progresión geométrica $(a_n)_{n \geq 0}$ de razón 2 (o sea, $a_{n+1} = 2a_n$, $\forall n \geq 0$) verifica $a_0 + a_1 = 12$ entonces $a_{100} = 2^{102}$.
Respuesta: Verdadero. Sabemos que $a_{100} = 2^{100}a_0$ y que $a_0 + a_1 = 3a_0 = 12$ por lo que $a_{100} = 2^{100} \cdot 4 = 2^{102}$.

Múltiple Opción

1. La cantidad de funciones $f : \{1, 2, \cdots, 9\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\#f^{-1}(4) = 3$, donde el conjunto preimagen de y se define por $f^{-1}(y) = \{x : 1 \leq x \leq 9, f(x) = y\}$, viene dado por:
Respuesta: B) $C_6^9 \cdot 3^6$ pues hay C_6^9 formas de seleccionar los 6 elementos del dominio cuya imagen cae en $\{1, 2, 3\}$, para cada uno de esos 6 elementos hay 3 posibilidades para su imagen, luego se aplica la regla del producto.

---

2. Se tienen 30 bizcochos de los cuales 10 son de chocolate y 20 son de crema. Se los quiere repartir entre 3 estudiantes: Laura, Pedro y Martina. ¿De cuántas formas se los puede repartir si a cada uno le debe tocar al menos 2 bizcochos de chocolate y al menos 3 bizcochos de crema?
Respuesta: C) 1170. Primero le damos a cada uno los 2 bizcochos de chocolate y los 3 de crema de formas de cumplir el requerimento. Nos quedan por repartir 4 bizcochos de chocolate y 11 de crema. Tenemos $CR_4^3 = C_4^6 = 15$ formas de repartir los restantes de chocolate y $CR_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$ formas de repartir los restantes de crema. En total tenemos $15 \cdot 78 = 1170$ formas de repartir los bizcochos.

---

3. Sea a_n igual a la cantidad de listas ternarias de largo n (o sea, formadas por los dígitos 0, 1 y 2) que no contienen dos ceros consecutivos. Se sabe que la sucesión (a_n) verifica una recurrencia lineal homogénea con polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:
Respuesta: C) $a_3 = 22$ **y** $a + b = -4$. Para $n \geq 3$ se tiene que de las a_n listas ternarias de largo n que no contienen dos ceros consecutivos, hay exactamente a_{n-1} de ellas que terminan en 1, a_{n-1} de ellas que terminan en 2, a_{n-2} de ellas que terminan en 10 y a_{n-2} de ellas que terminan en 20. De donde $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, cuyo polinomio caracterísitco es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 2$. Luego $a = b = -2$ y $a + b = -4$. Directamente vemos que $a_1 = 3$ y $a_2 = 8$ (de las 9 listas posibles hay que quitar la lista $[0, 0]$), usando la recurrencia $a_3 = 2a_2 + 2a_1 = 6 + 16 = 22$.

---

4. Considere la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ con $a_0 = 0, a_1 = 0$ y $a_n = 3n \cdot a_{n-1} - 2n(n-1) \cdot a_{n-2} + n!$ para todo $n \geq 2$. Entonces a_{10} viene dado por: (Sugerencia: utilice el cambio de variable $b_n = \frac{a_n}{n!}$.)
Respuesta: B) $1013 \cdot 10!$. Dividiendo por $n!$ tenemos $\frac{a_n}{n!} = 3\frac{a_{n-1}}{(n-1)!} - 2\frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{n!}{n!}$ para $n \geq 2$. Con el cambio de variable sugerido nos queda $b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2} + 1$ y $b_0 = b_1 = 0$. El polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ tiene raíces 1 y 2. Observamos que el término no homogéneo es $f(n) = 1 = r^n \cdot g(n)$ donde $r = 1$ y $g(n) = 1$. Como $r = 1$ es una raíz simple del polinomio característico $p(\lambda)$, hay una solución particular de la forma $b_n^{(p)} = An$ con $A \in \mathbb{R}$ que debe verificar $b_n^{(p)} - 3b_{n-1}^{(p)} + 2b_{n-2}^{(p)} = 1 \Rightarrow An - 3A(n-1) + 2A(n-2) = 1 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$. Luego $b_n^{(p)} = -n$

para todo $n \geq 0$. Luego $b_n = -n + \alpha + \beta 2^n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que podemos obtenerlas usando las condiciones iniciales: $b_0 = \alpha + \beta = 0$ y $b_1 = \alpha + 2\beta - 1 = 0$. Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, luego $b_n = 2^n - (n+1)$ para todo $n \geq 0$. Deshaciendo el cambio de variable tenemos $a_n = b_n \cdot n!$, en particular $a_{10} = (2^{10} - 11) \cdot 10! = 1013 \cdot 10!$.

---

5. Sea S el conjunto de todos los **enteros positivos pares** con 9 dígitos que pueden formarse permutando los dígitos de 123456789 tales que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

i) Los primeros cuatro dígitos (comenzando desde la izquierda) son $1, 2, 3$ y 4 en algún orden.

ii) Los dígitos impares no pueden permanecer en su posición original.

Entonces la cantidad de elementos de S viene dada por:
Respuesta: A) 28×14**.** En efecto, usando el P.I.E. tenemos $\overline{N} = 4! - 2 \cdot 3! + 2! = 14$ formas de colocar los 4 primeros dígitos (las dos condiciones serían que el 1 mantenga su posición original y que el 3 mantenga su posición original). Para los últimos 5 dígitos consideramos 2 casos, para que el número sea par debe terminar en 6 o 8. Consideramos el caso que termine en 6 (el otro caso es análogo), debemos permutar los dìgitos $5, 7, 8$ y 9 en las 4 posiciones restantes evitando que el 5 quede en su posición original y que el 7 quede en posición original (en la novena posición se encuentra el 6 asi que el 9 nunca quedará en su posición original). Análogo al primer caso tenemos 14 posibilidades para este caso y 14 posibilidades para el caso en que termine en 8, dando un total de 28 posibilidades (por la regla de la suma). Luego por la regla del producto tenemos 14×28 posibles permutaciones que cumplen todos los requisitos.
