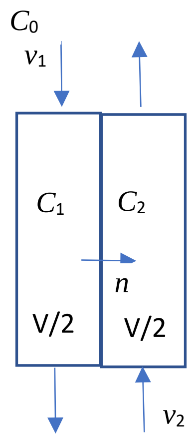
DCP 2024

PARCIAL A

Un sistema de separación por membrana puede representarse con el siguiente esquema:



El caudal volumétrico v_1 con concentración C_0 atraviesa la mitad del volumen del sistema y se genera un flujo entre ambas mitades $n = K_0\, V(C_1 - C_1{}^*)$ donde $C_1{}^* = mC_2$ es la concentración en equilibrio termodinámico. En principio el sistema está regulado para trabajar con caudales constantes, pero como consecuencia del proceso de producción la concentración C_0 puede tener variaciones. Para este proceso lo que interesa es controlar la concentración C_2. La turbulencia en ambos lados del equipo permite asumir un alto grado de mezcla.

a) Escriba las ecuaciones que definen al sistema, identificando variables de estado, variables de salida, variables de entrada y parámetros.
b) Estando en el estado estacionario se produce un aumento súbito del 20% en la concentración de entrada C_0. Grafique la respuesta de la variable de interés.
c) ¿El sistema es lineal? Si no lo es, linealícelo en torno al estado estacionario utilizando las condiciones nominales. Escriba el sistema de forma matricial en el dominio de las variables de estado (state-space). Verifique si el punto de trabajo es estable.
d) Determine la función de transferencia entre la variable de interés y las variables de entrada
e) Repita la parte b) utilizando ahora la función de transferencia.
f) Para controlar el valor de C_2 se implementa un bucle de control feedback que incluye un sensor con un rango de 0 a 1.0 mol/L con salida de 4 a 20 mA, y una bomba accionada eléctricamente que regula el caudal v_1 con una ganancia de 0.4 (L/min)/mA y una constante de tiempo de 1 min. El controlador es de tipo PI con K_c = 0.7 y τ_I = 0.01min. Implemente el bucle en un diagrama Xcos que grafique la respuesta frente al salto de la parte b).

Condiciones de trabajo:

V = 1 L v_1 = 0.5 L/min v_2 = 0.3 L/min K_0 = 0.4 min^{-1} m = 1.2 C_0 = 1.5 mol/L

SOLUCIÓN

a) Planteando los balances de masa (mezcla completa)

$$\frac{d\left(\frac{V}{2}C_1\right)}{dt} = v_1(C_0 - C_1) - KV(C_1 - mC_2)$$

$$\frac{d\left(\frac{V}{2}C_2\right)}{dt} = -v_2C_2 + KV(C_1 - mC_2)$$

Como el V es constante, entonces

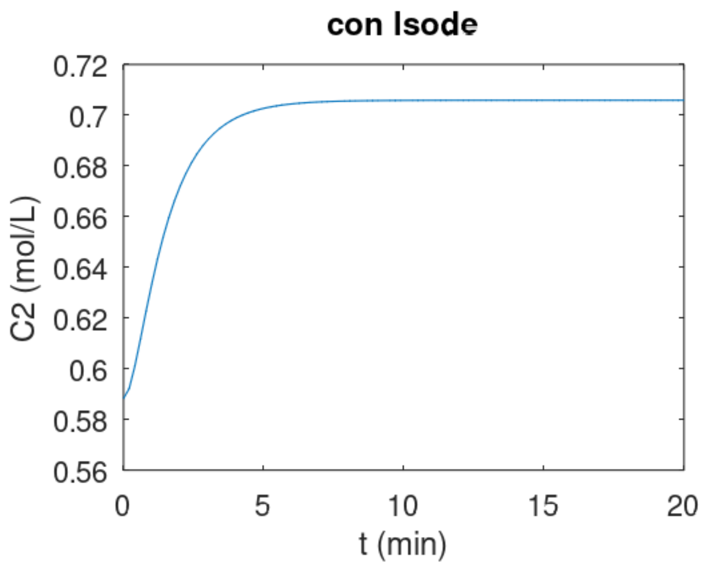
$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = \dfrac{2v_1}{V}(C_0 - C_1) - 2K(C_1 - mC_2) \\ \dfrac{dC_2}{dt} = \dfrac{-2v_2}{V}C_2 + 2K(C_1 - mC_2) \end{cases}$$

C_1 y C_2 son las variables de estado, C_0 *y* v_1 las variables de entrada y v_2 (podría considerarse una entrada pero en este ejercicio va a ser constante), V, K y m parámetros. Como variable de salida se puede tomar solamente C_2.

b)

```
clear all; clf;clc
pkg load control;pkg load signal

V = 1; %L
v1 = 0.5; % L/min
v2 = 0.3; % L/min
K = 0.4; % min-1
m = 1.2; % -
p = [V v1 v2 K m];

C0 = 1.5; % mol/L

function y = sep(x,t,C0,p)
  V = p(1); v1 = p(2); v2 = p(3); K = p(4); m = p(5);
  C1 = x(1); C2 = x(2);

  dC1_dt = 2*v1/V*(C0 - C1) - 2*K*(C1 - m*C2);
  dC2_dt = -2*v2/V*C2 + 2*K*(C1 - m*C2);
  y = [dC1_dt dC2_dt];
endfunction

t = linspace(0,20,100);
x0 = [0.5 0.5];
x_s = fsolve(@(x) sep(x,t,C0,p),x0)

x = lsode(@(x,t) sep(x,t,1.2*C0,p),x_s,t);
figure(1)
plot(t,x(:,2))
xlabel('t (min)'); ylabel('C2 (mol/L)');title('con lsode')
```

```
x_s =

   1.1471    0.5882
```



c) El sistema no es lineal en todas las variables porque hay un producto entre las dos variables de entrada C_0 y v_1 y entre la variable de estado C_1 y v_1 . Punto de trabajo:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2v_{1s}}{V}(C_{0s} - C_{1s}) - 2K(C_{1s} - mC_{2s}) \\ 0 = \dfrac{-2v_2}{V}C_{2s} + 2K(C_{1s} - mC_{2s}) \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\left(\dfrac{v_{1s}}{V} + K\right) & 2Km \\ 2K & -2\left(\dfrac{v_2}{V} + Km\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{2v_{1s}}{V} & \dfrac{2(C_{0s} - C_{1s})}{V} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D = 0

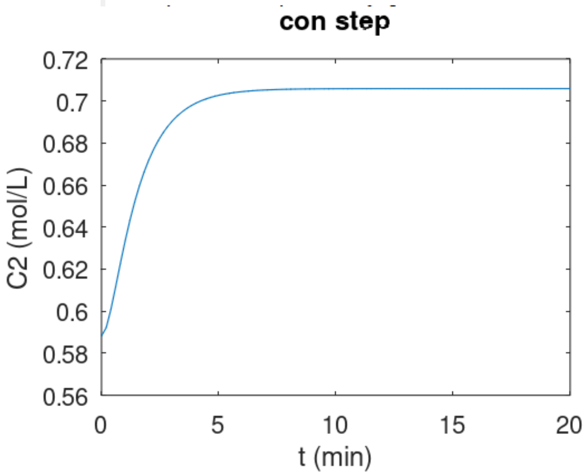
```
A = [-2*(v1/V+K) 2*K*m; 2*K -2*(v2/V+K*m)];
B = [2*v1/V  2*(C0-x_s(1))/V; 0 0]; % entrada 1: C0 ; entrada 2: v1
C = [0 0;0 1];

eig(A)
if eig(A) < 0
  disp('estable')
else
  disp('inestable')
endif
```

```
ans =

  -2.5645
  -0.7955

estable
```

d) Y e)

```
sl = ss(A,B,C);
[num,den] = ss2tf(sl);
g = tf(num,den)
sl_C0_C2 = sl(2,1); % correspondiente a la función de transferencia de C0 a C2
sl_v1_C2 = sl(2,2); % correspondiente a la función de transferencia de v1 a C2

figure (2)
x = 0.2*C0*step(sl_C0_C2,t);
plot(t,x+x_s(2))
xlabel('t (min)'); ylabel('C2 (mol/L)');title('con step')
```

```
Transfer function 'g' from input 'u1' to output ...

 y1:  0

               0.8
 y2:  -------------------
      s^2 + 3.36 s + 2.04

Transfer function 'g' from input 'u2' to output ...

 y1:  0

             0.5647
 y2:  -------------------
      s^2 + 3.36 s + 2.04
```



Alternativamente la g(s) se puede obtener analíticamente; de

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{2v_1}{V}(C_0 - C_1) - 2K(C_1 - mC_2)$$

Linealizando

$$\frac{dC_1}{dt} = -\left(\frac{2v_{1s}}{V} + 2K\right)C_1 + \frac{2v_{1s}}{V}C_0 + \frac{2(C_{0s} - C_{1s})}{V}v_1 + 2KmC_2$$

Pasando al dominio de Laplace

$$\left[s + \left(\frac{2v_{1s}}{V} + 2K\right)\right]C_1 - 2KmC_2 = \frac{2v_{1s}}{V}C_0 + \frac{2(C_{0s} - C_{1s})}{V}v_1$$

Y de $\frac{dC_2}{dt} = \frac{-2v_2}{V}C_2 + 2K(C_1 - mC_2)$ pasando al dominio de Laplace

$$sC_2 = \frac{-2v_2}{V}C_2 + 2K(C_1 - mC_2)$$

$$C_1 = \frac{\left[s + \left(\frac{2v_2}{V} + 2Km\right)\right]}{2K} C_2$$

Sustituyendo

$$\left[s + \left(\frac{2v_{1s}}{V} + 2K\right)\right] \frac{\left[s + \left(\frac{2v_2}{V} + 2Km\right)\right]}{2K} C_2 - 2KmC_2 = \frac{2v_{1s}}{V} C_0 + \frac{2(C_{0s} - C_{1s})}{V} v_1$$

$$\left[s + \left(\frac{2v_{1s}}{V} + 2K\right)\right]\left[s + \left(\frac{2v_2}{V} + 2Km\right)\right] C_2 - 4K^2mC_2$$

$$= \frac{4Kv_{1s}}{V} C_0 + \frac{4K(C_{0s} - C_{1s})}{V} v_1$$

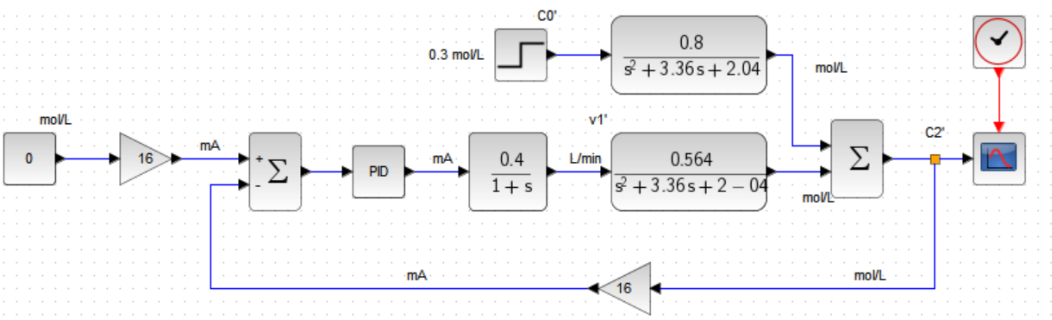
$$C_2 = \frac{\frac{4Kv_{11}}{V}}{s^2 + \left[\left(\frac{2v_1}{V} + 2K + \frac{2v_2}{V} + 2Km\right)\right]s + \left[\left(\frac{2v_1}{V} + 2K\right)\left(\frac{2v_2}{V} + 2Km\right) - 4K^2m\right]} C_0$$

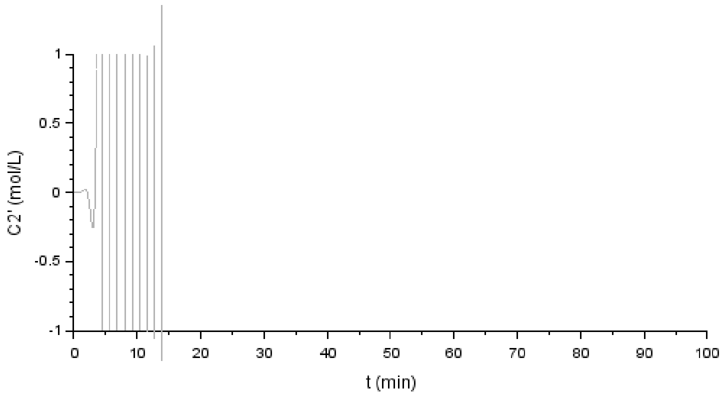
$$+ \frac{\frac{4K(C_{0s} - C_{1s})}{V}}{s^2 + \left[\left(\frac{2v_1}{V} + 2K + \frac{2v_2}{V} + 2Km\right)\right]s + \left[\left(\frac{2v_1}{V} + 2K\right)\left(\frac{2v_2}{V} + 2Km\right) - 4K^2m\right]} v_1$$

$$G_{C_0-C_2}(s) = \frac{0.8}{s^2 + 3.36s + 2.04}$$

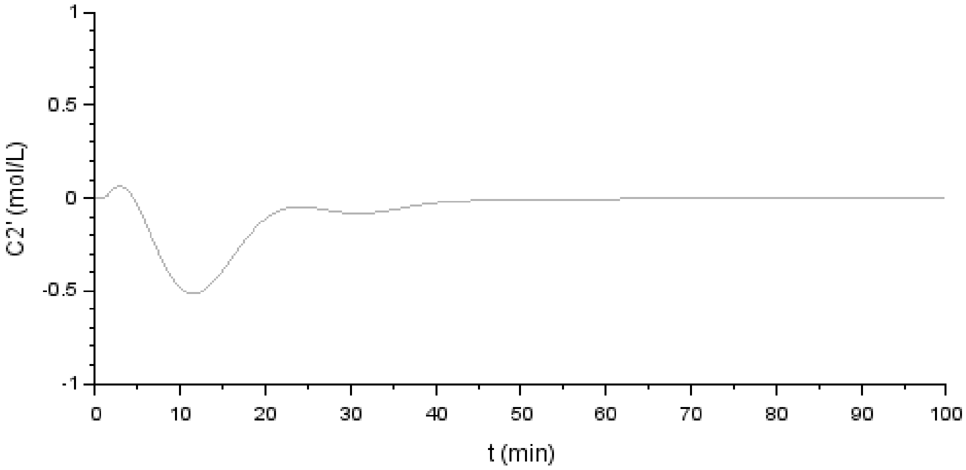
$$G_{v_1-C_2}(s) = \frac{0.564}{s^2 + 3.36s + 2.04} \frac{mol/L}{L/min}$$

f)





El controlador no está bien sintonizado, la constante de tiempo es muy chica y desestabiliza el bucle. Por ejemplo con una constante de tiempo τ_I = 70 min el resultado sería



C2' (mol/L)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
t (min)