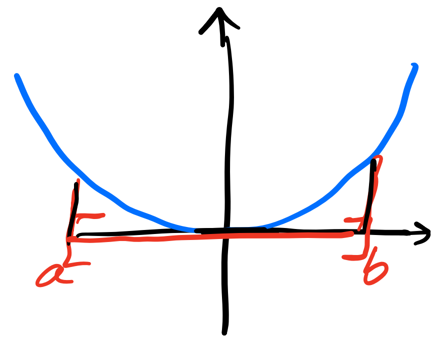
$f: I \to \mathbb{R}$

Decimos que f $\begin{cases} \text{está acotada superiormente} \\ \text{está acotada inferiormente} \\ \text{está acotada} \\ \text{tiene máximo absoluto} \\ \text{tiene mínimo absoluto} \end{cases}$ si

el conjunto $Im(f)$ cumple la propiedad

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2$



$Im(f) = [0, +\infty)$

f NO está acotada superiormente

f está acotada inferiormente

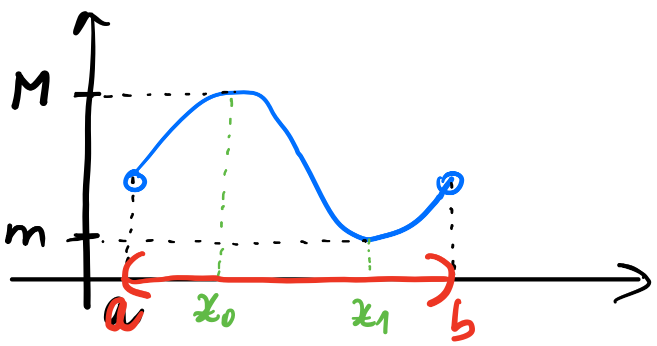
f no tiene máximo absoluto

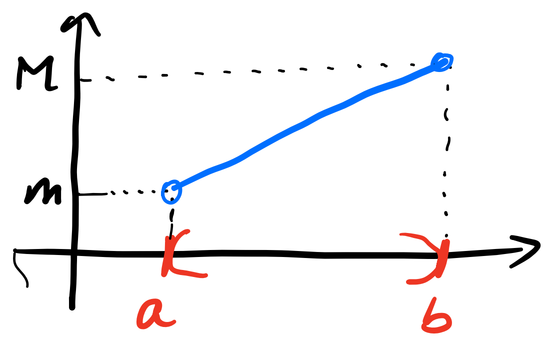
f tiene mínimo absoluto, y es 0

Teorema (Weierstrass)

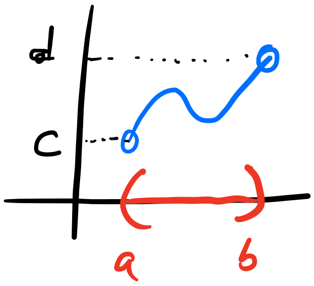
Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua.

Entonces f tiene máximo absoluto y mínimo absoluto.





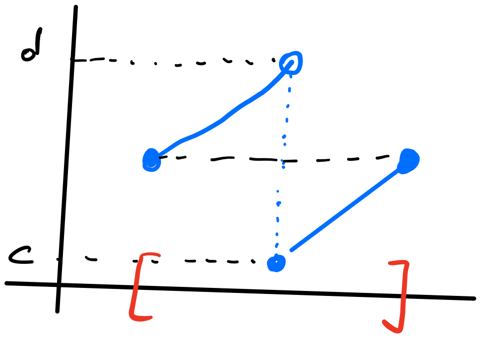
Ejemplos donde f no tiene máximo o mínimo absoluto
(porque alguna hipótesis no se cumple)



f es continua

$Im(f) = (c, d) \Rightarrow f$ no tiene máximo ni mínimo

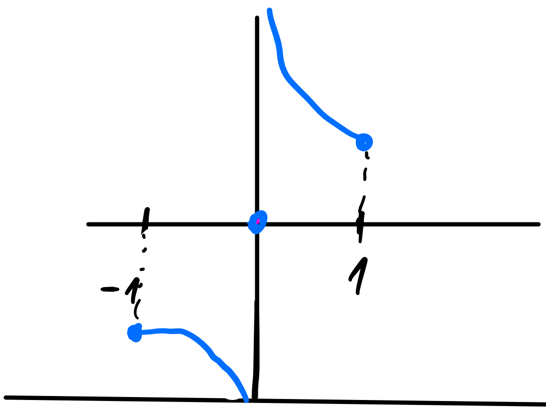
La hipótesis del teorema de Weierstrass que falla es que $Dom(f) = (a, b)$



f NO es continua

$Im(f) = [c, d)$

Entonces f no tiene máximo absoluto.



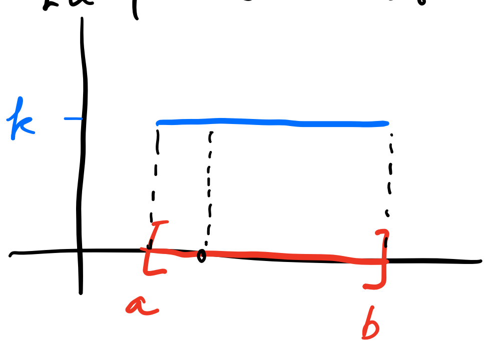
$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$Im(f) = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$

f no está acotada ni inferior ni superiormente
$\Rightarrow$ no tiene ni máximo ni mínimo absoluto.

La función constante



$Im(f) = \{k\}$

f tiene máximo y mínimo igual a k

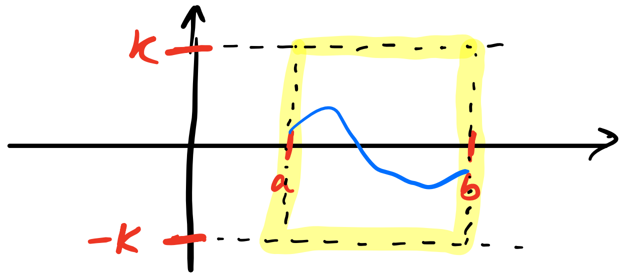
Para probar el teorema de Weierstrass precisaremos la siguiente proposición.

Proposición: Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua
Entonces f está acotada

Re-escribimos la definición

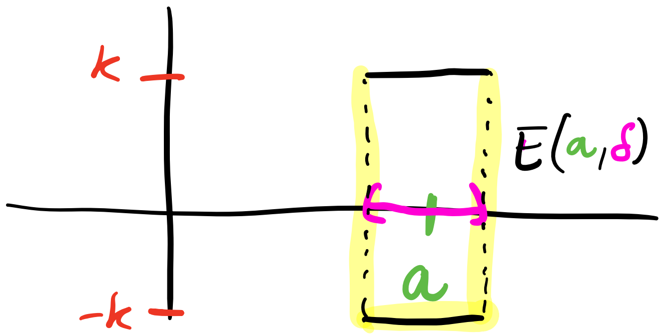
f está acotada sii $Im(f)$ está acotada

sii $\exists\, k>0 \,/\, |f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a,b]$



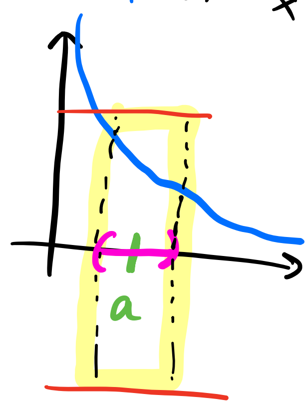
Para probar la proposición vamos a precisar un lema.

Decimos que $f: I \to \mathbb{R}$ está localmente acotada en $a \in I$ si $\exists\, \delta > 0$, $\exists\, k > 0 \,/\, |f(x)| < k \quad \forall x \in [a, \delta) \cap I$



Ej: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

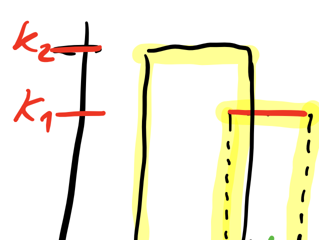


f no está acotada pero está localmente acotada en a

Lema: Si $f: I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y f es continua en a
Entonces f está localmente acotada en a.

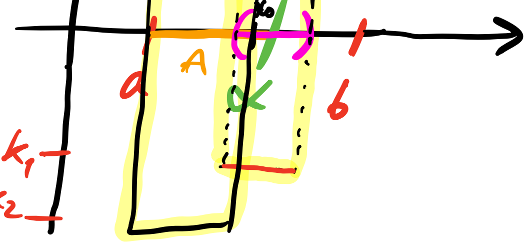
Demostración de la proposición:

Sea $A = \{ c \in [a,b] \,/\, f \text{ está acotada sobre } [a,c] \}$



$\{f(x) : x \in [a,c]\}$
está acotado

"la restricción de f al intervalo $[a,c]$ está acotada"



Queremos ver que $b \in A$

Observar que A está acotado superiormente por b.

Entonces, por el axioma de completitud, $\exists\ \alpha = \sup(A)$

Veamos primero que $\alpha = b$

Supongamos por absurdo que $\alpha \neq b \Rightarrow \alpha < b$

Por un lado, como f es continua en α, por el Lema, f es localmente acotada en α.

Esto quiere decir que existe $\begin{matrix} k_1 > 0 \\ \delta > 0 \end{matrix}$ / $|f(x)| < k_1 \quad \forall x \in E(\alpha, \delta)$

Por otro lado, por la prop. fundamental del supremo,

$A \cap (\alpha - \delta, \alpha] \neq \emptyset$. Tomemos x_0 en dicha intersección.

Como $x_0 \in A$, por definición de A:

$$\exists\ k_2 > 0 \ /\ |f(x)| < k_2 \quad \forall x \in [a, x_0]$$

Sea $k = \max\{k_1, k_2\}$

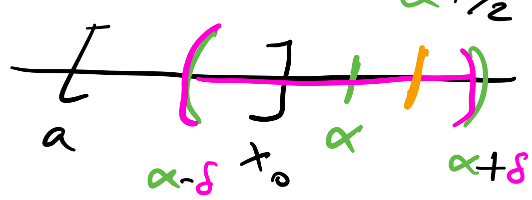
Entonces $|f(x)| < k \quad \forall x \in [a, x_0] \cup E(\alpha, \delta)$

$\alpha + \delta$

Entonces $\alpha + \delta/2 \in A$

lo que es absurdo porque

$\alpha = \sup(A)$

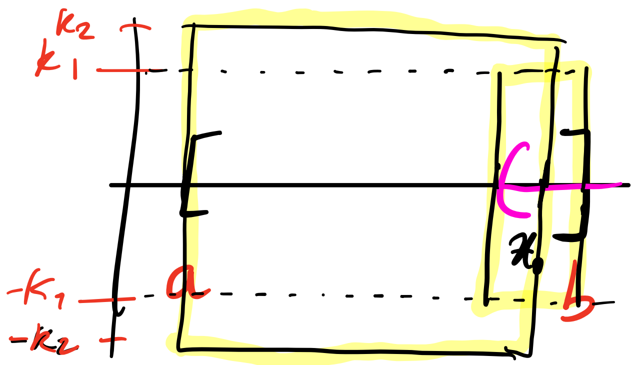


Como llegamos a un absurdo, nuestra suposición fue falsa, lo que implica que $\alpha = b$

Para terminar hay que probar que $b \in A$.

① por un lado f está loc. acotada en b, esto quiere decir que

$\exists \ \delta > 0, \ k_1 > 0 \ / \ |f(x)| < k_1 \quad \forall x \in E(b, \delta) \cap [a,b]$



Por otro lado, como $b = \sup(A)$, por la prop fund. del supremo

$\exists \ x_0 \in A \cap E(b, \delta)$

Como $x_0 \in A$, $\exists \ k_2 > 0 \ / \ |f(x)| < k_2 \quad \forall x \in [a, x_0]$

Tomamos $k = \max\{k_1, k_2\}$ y tenemos que

$|f(x)| < k \quad \forall x \in [a, b]$