TEOREMA DE BOLZANO

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{\text{continua}}$

supongamos que $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces, $\exists\, \alpha \in (a,b) \,/\, f(\alpha) = 0$

Lema de la conservación del signo

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. y

$x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > 0$

$(f(x_0) < 0)$

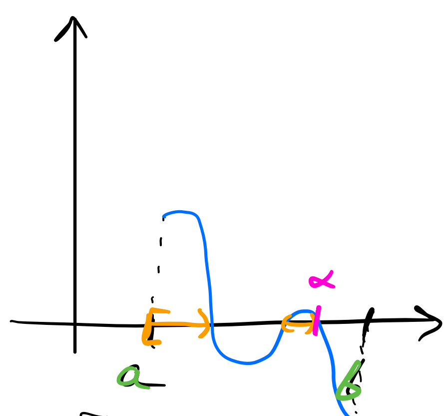
Entonces, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in E(x_0, \delta) \cap I$$

$$(f(x) < 0)$$

Demostración del Teorema de Bolzano:

Vamos a hacer la prueba en el caso en que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$



Sea $A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$

Observar que b es cota superior de A

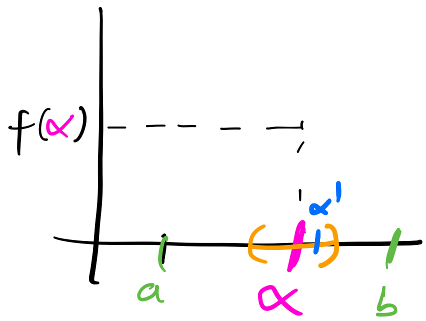
Entonces, como A está acotado superiormente, el axioma de completitud nos dice $\alpha = \sup(A)$

Vamos a probar que $f(\alpha) = 0$.

Para esto, supongamos por absurdo que no es el caso.

Tenemos que discutir 2 casos:

<u>CASO I:</u> $f(\alpha) > 0$



Primero, observemos que como

$f(b) < 0$ y $f(\alpha) > 0 \rightsquigarrow \alpha \neq b$

Por el Lema de la conservación del signo,

$\exists \delta > 0 \;/\; f(x) > 0 \quad \forall x \in E(\alpha, \delta)$

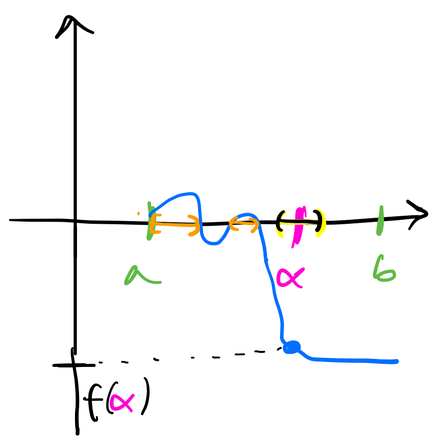
Entonces, podemos tomar $\alpha' \in E(\alpha, \delta) \cap I$ tal que $\alpha' > \alpha$

y como $f(\alpha') > 0$, $\alpha' \in A$

Esto es absurdo porque $\alpha = \sup(A)$ y por lo tanto es cota superior de A, pero

$\alpha' > \alpha$.

<u>Caso II:</u> $f(\alpha) < 0$



Por un lado, el lema de la conservación del signo nos dice que $\exists \delta > 0 \;/$

$f(x) < 0 \quad \forall x \in E(\alpha, \delta)$

Por otro lado, por la propiedad fundamental del supremo,

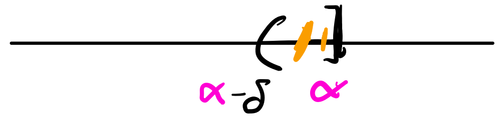
<u>Recordamos:</u>

<u>Propiedad fundamental del supremo:</u>

$(\alpha - \delta, \alpha] \cap A \neq \emptyset$

$\left(\text{porque } \alpha = \sup(A)\right)$

Si $\alpha = \sup(A)$, $\forall \delta > 0$, se tiene que $(\alpha-\delta, \alpha] \cap A \neq \emptyset$



Tomemos $\alpha' \in (\alpha - \delta, \alpha] \cap A$

Por un lado, como $\alpha' \in E(\alpha, \delta) \Rightarrow f(\alpha') < 0$

Por otro lado, como $\alpha' \in A \Rightarrow f(\alpha') > 0$

Esto es absurdo

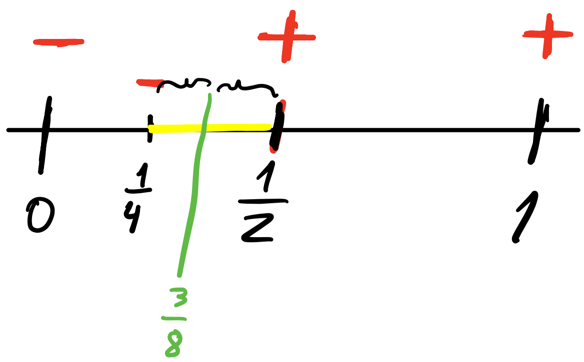
Entonces, nuestra suposición $f(\alpha) \neq 0$ es absurda, lo que implica que $f(\alpha) = 0$.

$\blacksquare$

USANDO BOLZANO PARA APROXIMAR RAÍCES

$$P(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$$

Queremos encontrar una raíz de P con error menor a $1/5$; es decir encontrar $\beta \in \mathbb{R}$ / $\exists$ una raíz en $E(\beta, \frac{1}{5})$.



$$P(0) = -1 < 0$$

$$P(1) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 2 - 1 > 0$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24} + \frac{3}{8} + \frac{2}{2} - 1 > 0$$

$P\left(\frac{1}{2}\right) \ldots \frac{\ }{24} + \frac{\ }{8} + \frac{\ }{2} - 1 > 0$

$$P\left(\frac{1}{4}\right) < 0$$

Entonces, como $P\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ y $P\left(\frac{1}{2}\right) > 0$; el teorema de Bolzano nos dice que $\exists$ una raíz de P en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)$; como $\frac{1}{8} < \frac{1}{5}$

β

$\frac{3}{8}$ es "raíz con error menor a $\frac{1}{5}$"

β