Capítulo 6

ESPACIOS VECTORIALES

En este capítulo se introducirá el concepto básico de este curso, que es el del título. Trataremos de hacer hincapié en las nociones geométricas simples que son comunes a otras ramas de la matemática y motivar todo lo posible en base al concepto de vectores en el espacio ambiente E estudiado en el Capítulo 4 sobre rectas y planos en el espacio.

En muchas ramas de la matemática aparecen conjuntos entre cuyos elementos se realizan *combinaciones lineales*. Ya hemos visto tres ejemplos de esto en nuestro curso: las matrices, las n-uplas y los vectores del espacio ambiente. Pero el lector puede recordar otros ejemplos como las funciones continuas y los polinomios con los cual también se opera. En los ejemplos desarrollados hasta el momento se hizo notar que muchos de los resultados obtenidos solo dependían de las propiedades que tenían las operaciones y no de otras particularidades del ejemplo en cuestión. También hemos observado que estas propiedades son las mismas en los tres casos abordados hasta ahora. Eso nos motiva a intentar un desarrollo abstracto de la teoría. Es decir, a introducir un conjunto arbitrario con cuyos elementos se supone se puede operar con propiedades análogas a las que por ejemplo tienen las operaciones con n-uplas. De este modo se desarrolla de una sola vez una teoría que puede aplicarse a múltiples y a priori disímiles ejemplos. Naturalmente los ejemplos que nos motivaron serán una constante fuente de inspiración para encontrar las definiciones, enunciados y demostraciones de nuestra teoría.

En particular el lector podrá recurrir frecuentemente a motivaciones basadas en los vectores de E, en las ternas de números o en las matrices, pero el objeto en estudio es un concepto abstracto, mucho más general, cuya comprensión y manejo fluido es una de las finalidades principales de este curso.

Un concepto fundamental que re-aparecerá en este capítulo es el de *independencia lineal*, cuya definición ya hemos establecido antes y que parece particularmente simple, pero cuya comprensión en toda su riqueza -nuestra experiencia lo indica- merece una atención especial. Realizar muchos ejercicios con este nuevo concepto abstracto, comprender bien como se le utiliza en diversas demostraciones, es una recomendación que hacemos amistosamente al lector.

6.1. Espacios vectoriales.

DEFINICIÓN 6.1. Un **espacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (que en este curso será el de los números reales $\mathbb{R}$, o el de los números complejos $\mathbb{C}$), es una cuádrupla ordenada $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ donde:

1. El conjunto $V \neq \emptyset$ cuyos elementos se llamarán vectores.
2. El cuerpo $\mathbb{K}$, cuyos elementos se llamarán escalares.
3. Una operación llamada suma de vectores, y denotada con el símbolo $+$ cuyo dominio es el producto cartesiano $V \times V$ y cuyo codominio es V ($+ : V \times V \to V$ quiere decir que $u + v$ está definida para todo par $(u, v) \in V \times V$ y da como resultado un elemento de V).
4. Una operación llamada producto de un escalar por un vector, y denotada con el símbolo $\cdot$, cuyo dominio es $\mathbb{K} \times V$ y cuyo codominio es V (es decir $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$), que verifica las siguientes propiedades:

   Para la suma:

   S1) Asociativa: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall\ u, v, w \in V$.
   S2) Conmutativa: $u + v = v + u$, $\forall\ u, v \in V$.
   S3) Neutro: Existe un elemento $\vec{0} \in V$ llamado "vector nulo" y denotado con $\vec{0}$, tal que $\vec{0} + u = u + \vec{0} = u$, $\forall u \in V$.
   S4) Opuesto: Para cada $u \in V$, existe un vector llamado "opuesto de u", denotado como $-u$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = \vec{0}$.

Para el producto:

P1) $\alpha.(\beta.u) = (\alpha.\beta).u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

P2) Multiplicación por la unidad del cuerpo: $1.u = u$, $\forall u \in V$.

P3) Distributiva respecto de suma de vectores: $\alpha.(u+v) = \alpha.u+\alpha.v$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$.

P4) Distributiva respecto de suma de escalares: $(\alpha+\beta).u = \alpha.u+\beta.u$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$.

OBSERVACIÓN 6.1. En P4) la suma de escalares (suma dentro de $\mathbb{K}$) se escribió con el símbolo $+$ pero no hay que confundirla con la suma dentro de V, que se representa también con el símbolo $+$.

OBSERVACIÓN 6.2. El lector comparará estas propiedades de la definición de espacio vectorial con las propiedades de los vectores de E, de las n-uplas de números reales, o de las matrices con sus operaciones de suma y producto por un escalar.

PROPOSICIÓN 6.3. *En todo espacio vectorial* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *se cumple:*

1. *El neutro es único.*
2. *Para cada vector* $u \in V$ *su opuesto* $-u$ *es único.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sean $\vec{0_1}$ y $\vec{0_2}$ dos neutros, entonces por propiedad de neutro: $\vec{0_1} = \vec{0_1} + \vec{0_2} = \vec{0_2}$, luego son iguales.

2) Sean $(-u)_1$ y $(-u)_2$ dos opuestos de u, entonces:

$(-u)_1 = \vec{0} + (-u)_1 = ((-u)_2 + u) + (-u)_1 = (-u)_2 + (u + (-u)_1) = (-u)_2 + \vec{0} = (-u)_2$. Esto prueba que coinciden. $\square$

OBSERVACIÓN 6.4. A los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ se los llamará espacios vectoriales reales, o $\mathbb{R}$–espacios vectoriales. A los espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ se los llamará espacios vectoriales complejos, o $\mathbb{C}$–espacios vectoriales. A veces, por abuso de lenguaje los espacios vectoriales se indican por el conjunto de vectores V, sobreentendiendo el cuerpo $\mathbb{K}$ y las operaciones $+$ y $\cdot$.

6.2. Ejemplos de espacios vectoriales.

EJEMPLO 6.1. Sean $V = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y las operaciones $+$ y $\cdot$ son las definidas en el Capítulo 2, entonces $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial (real).

EJEMPLO 6.2. Sea V el conjunto de ternas ordenadas de números reales $V = \mathbb{R}^3$, sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ como sigue:

- Suma: $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.
- Producto: $\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) \stackrel{def}{=} (\lambda.a_1, \lambda.a_2, \lambda.a_3)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todas las ternas de $\mathbb{R}^3$.

Notación: El símbolo $\stackrel{def}{=}$ quiere decir que el miembro de la izquierda esta siendo definido mediante la expresión de la derecha.

EJEMPLO 6.3. En general si V es el conjunto de las n-uplas ordenadas de números reales, $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y las operaciones son: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ y además $\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) \stackrel{def}{=} (\lambda.a_1, \lambda.a_2, \ldots, \lambda.a_n)$. Es fácil ver que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ y $-(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$. Las operaciones definidas en este ejemplo se llaman **usuales** de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 6.4. Sea V el conjunto de las sucesiones de números reales, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y las operaciones $+$ y $\cdot$ definidas como sigue:

Dadas $\{a_n\}$ y $\{b_n\} \in V$, y dado $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\{a_n\} + \{b_n\} \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots) = \{a_n + b_n\}$$

(la suma de dos sucesiones es definida como la sucesión que se obtiene sumando los términos n-ésimos de las sucesiones dadas),

$$\lambda \cdot \{a_n\} = \lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \stackrel{def}{=} (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \ldots, \lambda \cdot a_n, \ldots) = \{\lambda \cdot a_n\}.$$

Es fácil comprobar que es un espacio vectorial real. El vector nulo es la sucesión que tiene todos sus términos iguales a cero. Se verifica además $-\{a_n\} = \{-a_n\}$.

EJEMPLO 6.5. Sea $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios en una variable con coeficientes reales, sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sean la suma usual de polinomios y el producto usual de un número por un polinomio. Entonces $(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

EJEMPLO 6.6. El conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ forma un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función. Es decir:

- $f + g \overset{def}{=} h$ donde $h(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.
- $\lambda \cdot f \overset{def}{=} k$ donde $k(x) \overset{def}{=} \lambda f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

EJEMPLO 6.7. El conjunto de las n-uplas ordenadas de números complejos $V = \mathbb{C}^n$ con las operaciones definidas como en el Ejemplo 6.3 tomando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ forma un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$.

EJEMPLO 6.8. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y las operaciones en $\mathbb{C}^n$ se definen en forma análoga al ejemplo anterior (y en forma análoga al Ejemplo 6.3), resulta $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial real (distinto del Ejemplo 6.7, puesto que difieren en el cuerpo $\mathbb{K}$).

EJEMPLO 6.9. Las sucesiones de números complejos con la suma de sucesiones y el producto de una sucesión por un número complejo definidos en forma similar al Ejemplo 6.4 constituyen un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 6.5. En todos los ejemplos anteriores, para verificar que efectivamente son espacios vectoriales, hay que verificar que se cumplen las propiedades incluidas en la Definición 6.1, para la suma y el producto por escalares.

EJEMPLO 6.10. Sea V el conjunto de sucesiones de números complejos. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, operaciones definidas análogamente al Ejemplo 6.4. Entonces $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial distinto al del Ejemplo 6.4 y al del Ejemplo 6.9.

EJEMPLO 6.11. El conjunto $\{\vec{0}\}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde se define $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ y $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

EJEMPLO 6.12. El conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n, en una variable x (este conjunto se indica con $\mathbb{R}_n[x]$), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y la suma y producto por un real definido como en el Ejemplo 6.5, forman un espacio vectorial real.

EJEMPLO 6.13. El conjunto de los polinomios en una variable x, de grado igual a n, con coeficientes reales, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y la suma y el producto definidos como en el Ejemplo 6.5, <u>no forman</u> un espacio vectorial (estudiar por qué no).

EJEMPLO 6.14. Con las operaciones usuales $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ <u>no</u> es un espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 6.6. Se denota $u - v$ a la suma $u + (-v)$ con $u, v \in V$.

PROPOSICIÓN 6.7. *$0 \cdot u = \vec{0}$, $\forall u \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. $0 \cdot u = 0 \cdot u + \vec{0} = 0 \cdot u + (u - u) = (0 \cdot u + 1 \cdot u) - u = (0+1) \cdot u - u = 1 \cdot u - u = u - u = \vec{0}$. □

PROPOSICIÓN 6.8. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea u un vector cualquiera de V, entonces $\vec{0} = \alpha \cdot u - \alpha \cdot u = \\ = \alpha \cdot (\vec{0} + u) - \alpha \cdot u = (\alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot u) - \alpha \cdot u = \alpha \cdot \vec{0} + (\alpha \cdot u - \alpha \cdot u) = \\ = \alpha \cdot \vec{0} + \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0}$. □

PROPOSICIÓN 6.9. *Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $u \in V$. Entonces, $\alpha \cdot u = \vec{0}$ si y solo si $\alpha = 0$ y/o $u = \vec{0}$.*

DEMOSTRACIÓN. Directo: Supongamos que $\alpha \neq 0$. Como $\alpha \cdot u = \vec{0}$, tenemos que $\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot u) = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{0} = \vec{0}$ por la Proposición 6.8, de donde $(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha) \cdot u = \vec{0}$, o sea $1 \cdot u = \vec{0}$, es decir $u = \vec{0}$.

Recíproco: son las Proposiciones 6.7 y 6.8. □

PROPOSICIÓN 6.10. $(-1).v = -v$, $\forall v \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que $(-1).v$ es el opuesto de v, es decir

$$v + (-1).v = 1.v + (-1).v = (1 + (-1)).v = 0.v = \vec{0}$$

donde la última igualdad es por la Proposición 6.7. □

6.3. Subespacios.

DEFINICIÓN 6.2. Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $W \neq \varnothing$ un subconjunto no vacio de V. Diremos que W es un **subespacio** de V, si se cumple:

a) $w_1 + w_2 \in W$, para todo w_1 y $w_2 \in W$.
b) $\lambda w \in W$, para todo $w \in W$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Es decir, un subespacio de un espacio vectorial es un conjunto no vacío, "cerrado" frente a la suma y al producto de escalares por vectores.

OBSERVACIÓN 6.11. Si W es un subespacio, entonces $\vec{0} \in W$. En efecto como $W \neq \varnothing$ existe $w \in W$ y como W es cerrado para la multiplicación por escalares, $\lambda w \in W \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$. En particular $0.w = \vec{0} \in W$. La última igualdad es consecuencia de la Proposición 6.7.

EJEMPLOS DE SUBESPACIOS VECTORIALES

EJEMPLO 6.15. Los primeros ejemplos y los más sencillos, de subespacio vectoriales, son los llamados **subespacios triviales**. Uno de ellos es $W = \left\{\vec{0}\right\}$ (conjunto formado por un único elemento, el vector nulo). El otro subespacio trivial es $W = V$. En ambos casos, W es subespacio de V. ■

EJEMPLO 6.16. Sea π un plano del espacio por el origen.

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax + by + cz = 0\}.$$

Entonces π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. En efecto $\pi \neq \varnothing$, pues $\vec{0} = (0, 0, 0) \in \pi$ y es cerrado para las operaciones. Sean $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos de π y λ un escalar cualquiera. Verifiquemos primero que la suma es cerrada:

$$p_1 + p_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) = q$$

y $q \in \pi$. Para ver que el elemento q pertenece al conjunto π es necesario, dado que éste esta definido por comprensión, verificar que q cumple la condición lógica de pertenencia, esto es, sus coordenadas deben verificar la ecuación $ax + by + cz = 0$. Veamos esto:

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = \overbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}^{=0 \text{ pues } p_1\in\pi} + \overbrace{(ax_2 + by_2 + cz_2)}^{=0 \text{ pues } p_2\in\pi} = 0.$$

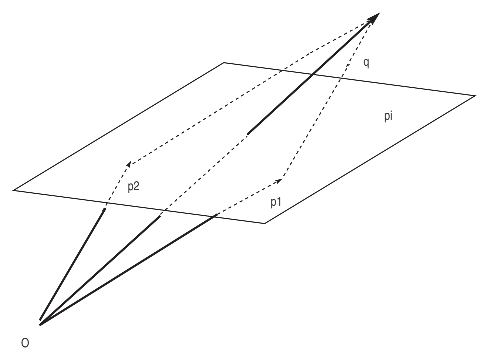
Veamos ahora que π es cerrado para la multiplicación por escalares:

$$\lambda p_1 = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = q'$$

y $q' \in \pi$ pues:

$$a(\lambda x_1) + b(\lambda y_2) + c(\lambda z_1) = \lambda \overbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1)}^{=0 \text{ pues } p_1 \in \pi} = 0.$$

Si en cambio se considera un plano π que no pase por el origen, entonces su ecuación será $ax + by + cz = d$ con $d \neq 0$. Obsérvese que $\pi \neq \varnothing$ pero $\vec{0} \notin \pi$ en consecuencia no es un subespacio. Es además fácil ver que no es cerrado para las operaciones: si p_1 y p_2 son dos puntos de π su suma $q = p_1 + p_2$ no pertenece a π tal como se ve en la Figura. Compruebe el lector esto analíticamente. ■



EJEMPLO 6.17. Sea r un recta por el origen, entonces r es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax + by + cz = 0;\, a'x + b'y + c'z = 0\}$$

Obsérvese que $(x, y, z) \in r$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.42}$$

Sean $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos de r y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $q = p_1 + p_2$ pertenece a r. Para verificar esto veremos que las coordenadas de $q = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ verifican la condición (6.42)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ pues } p_1 \in r} + \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ pues } p_2 \in r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El lector verificará que $\lambda p_1 = q' \in r$.
Es claro que para verificar que $p_1 + p_2$ pertenece a r sólo tuvimos que usar la propiedad distributiva del producto de matrices, por lo tanto en general si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es una matriz cualquiera y $S = \{X \in \mathbb{R}^n : \ AX = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ es el conjunto solución del sistema homogéneo de matriz A, entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
De hecho veremos más adelante que el recíproco es verdadero. Es decir que si S es un subespacio cualquiera de $\mathbb{R}^n$ existe $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que S es el conjunto solución del sistema homogéneo $AX = \vec{0}$.
Es correcto entonces afirmar que los subespacios de $\mathbb{R}^n$ son exactamente los conjuntos solución de los sistemas homogéneos de ecuaciones.
Por otra parte, desde un punto de vista más geométrico es natural entonces pensar esquemáticamente los subespacios de $\mathbb{R}^n$ (y de hecho como veremos más adelante, los de un espacio vectorial de dimensión finita cualquiera[1]) como la generalización de los planos y rectas por el origen de E. ■

EJEMPLO 6.18. En $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, sea $W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } a_3 = 0\}$. Entonces W es un subespacio de V.

[1] Para entender que es un espacio de dimensión finita véase más adelante la Definición 6.8

EJEMPLO 6.19. En $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, sea $W = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_i = 0\}$ con i fijo, $0 < i \leq n$, es decir W es el conjunto de las n-uplas con la i-ésima componente nula. Entonces W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 6.20. En el espacio de las sucesiones de números reales V (Ejemplo 6.4), sea W el conjunto formado por las sucesiones que a partir de algún término, tienen todos los términos restantes iguales a cero. Verificar que W es un subespacio vectorial de V.

EJEMPLO 6.21. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios definido en el Ejemplo 6.5. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el subconjunto de los polinomios de grado menor o igual que n. Entonces $\mathbb{R}_n[x]$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$. Nótese que si consideramos sólo el conjunto de polinomios de grado exactamente n (con $n \geq 1$), no constituye un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ pues el polinomio nulo tiene grado 0.

EJEMPLO 6.22. Sea V el espacio vectorial del Ejemplo 6.6, y sea $C[a, b]$ el conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que son continuas. Entonces $C[a, b]$ es un subespacio de V. Recordar que la suma de funciones continuas es una función continua, así como también lo es el producto de una función continua por un escalar.

EJEMPLO 6.23. En el espacio de las n-uplas de complejos (Ejemplo 6.7), sea W el subconjunto de las n-uplas cuya suma de términos da cero. Se puede verificar que W es un subespacio de $\mathbb{C}^n$.

EJEMPLO 6.24. En el espacio del Ejemplo 6.7 $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$, sea W el subconjunto de las n-uplas cuyo primer término es $5 + 2i$. Este subconjunto W no es un subespacio vectorial, porque al sumar dos elementos de W, el resultado no pertenece a W.

EJEMPLO 6.25. Sea $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ el espacio vectorial del Ejemplo 6.8. Sea W**'** el subconjunto formado por las n-uplas de números complejos cuyos términos tienen parte real igual a cero. Entonces W**'** es un subespacio. En este ejemplo es importante que el cuerpo $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{C}$. Observar que el mismo subconjunto W**'**, considerado como subconjunto del espacio vectorial $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ no es un subespacio.

EJEMPLO 6.26. En el Ejemplo 6.9 de las sucesiones de números complejos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, con las operaciones usuales, sea W el subconjunto de las sucesiones que tienen igual a cero los términos que están en lugar par: $W = \{\{a_n\} : a_n \in \mathbb{C}, a_{2k} = 0\}$. Entonces W es un subespacio.

TEOREMA 6.12. *Sea W es un subespacio de $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$, entonces $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ "heredadas"de V, es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.*

Demostración. Hay que probar que si $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es espacio vectorial y $W \subset V$ es subespacio de V entonces $(W, \mathbb{K}, +, \cdot)$ también es un espacio vectorial, es decir se cumplen todas las condiciones de la Definición 6.1. Las operaciones $+$ y $\cdot$ en W son las mismas que en V sólo que restringidas a W (esto es, definidas sólo para los elementos de W).
Como W es cerrado para las operaciones, estas quedan bien definidas, es decir $+ : W \times W \to W$ y $\cdot : \mathbb{K} \times W \to W$. Por otra parte las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y todas las del producto se verifican en W pues se verificaban para cualesquiera vectores de V, y $W \subset V$.
Además en la Observación 6.11 vimos que $\vec{0} \in W$ y como $\vec{0} + v = v + \vec{0} = v \quad \forall v \in V$, entonces también será esto cierto $\forall v \in W$, pues W es un

subconjunto de V. Por lo tanto la suma en W tiene neutro. Resta entonces sólo verificar la existencia del opuesto. Naturalmente que si $w \in W \subset V$ es un elemento cualquiera de W entonces también lo es de V y por lo tanto existe $-w \in V$, pero a priori podría ocurrir que $-w \notin W$. Veremos que esto no es posible si W es no vacío y cerrado para las operaciones. En efecto sea $w \in W$, como W es cerrado para las operaciones se tiene que $\lambda w \in W \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$, en particular si $\lambda = -1$. Por lo tanto $(-1)w = -w \in W$. En esta última igualdad se usó la Proposición 6.10. Esto prueba la existencia del opuesto en W y concluye la prueba. □

OBSERVACIÓN 6.13. Este teorema permite ver en forma fácil si un cierto conjunto W sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con ciertas operaciones $+$ y $\cdot$ es un espacio vectorial. En efecto, en lugar de verificar todas las condiciones de la Definición 6.1, alcanza ver si W es un subespacio de algún V, que ya se sepa tiene estructura de espacio vectorial. Para lo cual alcanza con probar que W es cerrado con respecto a la suma y cerrado con respecto al producto de un escalar por un vector.

TEOREMA 6.14. *Sean $W_1, W_2, \ldots, W_n$ subespacios de un mismo espacio vectorial V. Entonces $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$ es también un subespacio de V.*

Demostración. En primer lugar $W \neq \varnothing$; en efecto, el vector $\vec{0}$ pertenece a todos los subespacios W_i y por lo tanto pertenece también a su intersección W.

Además $W \subset V$ puesto que $W \subset W_i \subset V$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Falta probar que W es cerrado frente a la suma de vectores y al producto de un escalar por un vector. Sean w y $w' \in W$, entonces w y $w' \in W_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego $w + w' \in W_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ (puesto que W_i es un subespacio para todo $i = 1, \ldots, n$). Entonces $w + w' \in W$.

Ahora sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $w \in W$. Se tiene $w \in W_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. De allí $\alpha{\cdot}w \in W_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ (puesto que W_i es un subespacio). Entonces $\alpha{\cdot}w$ pertenece a la intersección de todos los W_i, o sea a W. $\square$

6.4. Subespacio generado e independencia lineal.

En esta sección daremos definiciones de combinación lineal, dependencia e independencia lineal de vectores en espacios vectoriales cualesquiera, que generalizan los conceptos vistos en el Capítulo 2.

DEFINICIÓN 6.3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores de V. Decimos que v es **combinación lineal (c.l.)** de $v_1, v_2, \dots, v_n$ cuando existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Si A es un subconjunto no vacío de V, se indica con $[A]$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A, es decir:

$$[A] = \left\{ v \in V \text{ tales que} : v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in A \ \forall i \right\}.$$

TEOREMA 6.15. *Sean V un espacio vectorial y $A \neq \varnothing$, $A \subset V$. Entonces $[A]$ es un subespacio de V.*

DEMOSTRACIÓN. $[A]$ es distinto de vacío porque dado algún vector v de A, se tiene $\vec{0} = 0{\cdot}v \Rightarrow \vec{0}$ es combinación lineal de $v \Rightarrow \vec{0} \in [A]$. Sean ahora $v, w \in [A]$. Esto quiere decir que existen vectores $v_1, v_2, \dots, v_n,\ w_1, w_2, \dots, w_m$ pertenecientes a A (no necesariamente distintos) y existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ y $w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_m w_m$. Entonces $v + w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_m w_m$. O sea, $v + w$ es combinación lineal de elementos de A. Hasta ahora hemos probado que $[A]$ es cerrado respecto a la suma.

Sea ahora $\lambda \in \mathbb{K}$ y sea $v \in [A]$. Existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y vectores $v_1, v_2, \dots, v_n \in A$, tales que: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Entonces: $\lambda{\cdot}v = \lambda{\cdot}\left(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n\right) = \left(\lambda{\cdot}\alpha_1\right) v_1 + ... + \left(\lambda{\cdot}\alpha_n\right) v_n$ y obtenemos que λv también es combinación lineal de vectores de A. O sea,

$[A]$ es cerrado respecto al producto de un escalar por un vector. Luego, $[A]$ es un subespacio. □

DEFINICIÓN 6.4 (Subespacio generado). Sea V un espacio vectorial, A un subconjunto de V. Decimos que $[A]$ es el **subespacio generado** por A.

DEFINICIÓN 6.5 (Conjunto generador). Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subespacio. Decimos que $A \subset S$ es un **generador** de S si $[A] = S$. Es decir si cualquier elemento de S es combinación lineal de A (ver Definición 6.3).

Notación: Si A es un generador de S pondremos $A \xrightarrow{g} S$.

EJEMPLO 6.27. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $A = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$, ¿$A \xrightarrow{g} V$?
Sea $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Para que A genere $\mathbb{R}^3$ debemos poder escribir v como combinación lineal de A, cualesquiera sean a, b y c. Sea α_1 y α_2 reales tales que:

$$(a,b,c) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) \iff \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ 0 = c \end{cases}.$$

Es claro que el sistema anterior es compatible si y solo si $c = 0$. Entonces A no genera $\mathbb{R}^3$. ■

EJEMPLO 6.28. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, c = 0\}$. Determinar un generador de S.
Tenemos que $v \in \mathbb{R}^3$ si y solo si existen a y b reales tales que:

$$v = (a,b,0) = (a,0,0) + (0,b,0) = a(1,0,0) + b(0,1,0)$$

entonces $A = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \xrightarrow{g} S$. ■

EJEMPLO 6.29. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \,:\, A = A^t\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}$ el subespacio (verificarlo) de las **matrices simétricas** 2×2. Determinemos un generador de S. Para eso observemos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$ si y solo si $b = c$. Entonces $A \in S$ si y solo si existen a, b, d reales tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} =$$
$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{g} S.$ ■

EJEMPLO 6.30. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ y

$$S = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, p \text{ tiene termino independiente nulo}\}.$$

Sea p tal que $p(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces $p \in S$ si y solo si $c = 0$, es decir $p \in S$ si y solo si existen a, b reales tales que $p(x) = ax^2 + bx$. Pero entonces si ponemos $p_i \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p_i(x) = x^i$, con $i = 0, 1, 2$ tenemos que $p \in S$ si y solo si existen a y b reales tales que $p = ap_2 + bp_1$. Entonces $G = \{p_2, p_1\} \xrightarrow{g} S$. ■

PROPOSICIÓN 6.16. *Sea V un espacio vectorial y A un subconjunto finito de V, o sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Si v_k es combinación lineal de los demás vectores de A, entonces $[A] = \left[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\right]$.*

DEMOSTRACIÓN. Toda combinación lineal de vectores de

$$\left\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\right\}$$

es también una c.l. de vectores de A (basta agregar el vector v_k multiplicado por el escalar 0), es decir $\left[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\right] \subset [A]$.

Ahora hay que probar al revés: que toda c.l. de vectores de A es c.l. de vectores de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Se sabe que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n. \tag{6.43}$$

Sea $u \in [A]$ entonces u es c.l. de A, tendremos:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Sustituyendo v_k por la expresión (6.43), resulta:

$$u = (\lambda_1 + \lambda_k \alpha_1) v_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} + \lambda_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} + \\ + (\lambda_{k+1} + \lambda_k \alpha_{k+1}) v_{k+1} + \cdots + (\lambda_n + \lambda_k \alpha_n) v_n.$$

O sea, u es c.l. de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ como queríamos probar. $\square$

DEFINICIÓN 6.6 (Independencia y dependencia lineal). Sea V un espacio vectorial, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Decimos que A es **linealmente independiente (L.I.)** si y sólo si dados escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Decimos que el conjunto A es **linealmente dependiente (L.D.)** cuando no es L.I.

Es decir, un conjunto es L.I. cuando la única combinación lineal de sus elementos que da el vector nulo es la **trivial**, esta es la que tiene todos los coeficientes nulos.
Por el contrario es L.D. si existe alguna combinación no trivial (algún coeficiente distinto de cero) de sus elementos que de el vector nulo.

El lector debe remitirse a la Sección 2.5 del Capítulo 2 por ejemplos en $\mathbb{R}^n$, no obstante esto veremos aquí algunos ejemplos nuevos.

EJEMPLO 6.31. Sea V un espacio vectorial, $v \neq \vec{0}$ un vector de V. Entonces $\{v\}$ es L.I.

EJEMPLO 6.32. Sea V un espacio vectorial, el conjunto $\left\{\vec{0}\right\}$ es L.D.

EJEMPLO 6.33. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ (V espacio vectorial), entonces el conjunto $\left\{\vec{0}, v_1, v_2, \ldots, v_n\right\}$ es L.D. ■

EJEMPLO 6.34. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

entonces G es L.I. En efecto sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reales tales que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Entonces G es L.I. ■

EJEMPLO 6.35. Sea $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ donde $q_1(x) = x + 1$, $q_2(x) = x^2 + x - 1$, $q_3(x) = x^2 + 2x$ y $q_4(x) = x^2 - 2$. Investiguemos la dependencia lineal de A.
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ reales tales que

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 + \lambda_4 q_4 = \vec{0} \Longleftrightarrow \tag{6.44}$$

$$\lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x) + \lambda_4 q_4(x) = \vec{0}, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x^2 + x - 1) + \lambda_3(x^2 + 2x) + \lambda_4(x^2 - 2) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)x + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_4) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

de donde utilizando el teorema de identidad de polinomios[2] se deduce que (6.44) se cumple si y solo si λ_1,λ_2, λ_3 y λ_4 verifican el sistema homogéneo:

$$(S)\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ \lambda_1-\lambda_2-2\lambda_4=0 \end{cases}.$$

Escalerizando y resolviendo (S) se deduce que es un sistema compatible indeterminado y que

$$Sol(S)=\left\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4 \,:\, \lambda_1=\lambda_4-\lambda_3, \lambda_2=-(\lambda_3+\lambda_4), \lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

Por lo tanto (S) admite soluciones no triviales y consecuentemente también (6.44), por lo cual G es L.D.

Observemos también que sustituyendo la solución obtenida en (6.44) se tiene que $\forall\,\lambda_3$ y $\lambda_4\in\mathbb{R}$:

$$(\lambda_4-\lambda_3)q_1-(\lambda_3+\lambda_4)q_2+\lambda_3q_3+\lambda_4q_4=\vec{0}\Longrightarrow$$

$$\text{poniendo } \lambda_3=0 \text{ y } \lambda_4=1 \text{ tenemos } q_4=-q_1+q_2.$$

Esto es, un vector de A resultó combinación lineal de los restantes. ■

OBSERVACIÓN 6.17. Las definiciones L.I. y L.D. se dieron para conjuntos finitos, pero son aplicables también a conjuntos con una cantidad infinita de vectores en un espacio vectorial. Si A es infinito, $A\subset V$, V espacio vectorial, decimos que A es L.I. cuando cualquier subconjunto finito de A es L.I. Decimos que A es L.D. cuando no es L.I. (es decir, cuando algún subconjunto finito de A es L.D.).

EJEMPLO 6.36. Sea $V=\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios de una variable x con coeficientes reales y sea $A=\{p_i\in\mathbb{R}[x]\,:\,i\in\mathbb{N}\}$ donde $p_i(x)=x^i$. Entonces A es un conjunto L.I. con infinitos elementos, pues cualquier subconjunto $B\subset A$ finito que consideremos contiene una

[2]Recordamos al lector el enunciado de este resultado: dos polinomios de coeficientes reales o complejos son iguales si y solo si los coeficientes de las potencias respectivas son iguales.

cantidad finita de polinomios de diferentes grados, lo cual implica que B es L.I. (verificarlo). ■

Veremos ahora un resultado que generaliza la Proposición 2.14 del Capítulo 2 y lo visto en el Ejemplo 6.35; un conjunto de más de un vector es L.D. si y solo si uno de los vectores es combinación lineal de los demás. Más aún, probaremos que la dependencia lineal se da sólo cuando un vector del conjunto se puede despejar en función (lineal) de los anteriores.

PROPOSICIÓN 6.18. *Sea V un espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ un conjunto ordenado, con $n > 1$ y tal que $v_1 \neq \vec{0}$.*
Entonces: A es L.D. si y sólo si existe $v_k \in A$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tal que v_k es combinación lineal de los $k-1$ vectores anteriores $\left\{v_1, \ldots, v_{k-1}\right\}$.

DEMOSTRACIÓN. $(\Leftarrow)$ Sabemos que existe $v_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tal que v_k es combinación lineal de los $k-1$ vectores anteriores de A:

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$$

o sea

$$\vec{0} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \cdots + 0 \cdot v_n.$$

Tenemos así una combinación lineal de los vectores de A, con no todos los coeficientes iguales a cero (porque el coeficiente de v_k es -1), que da el vector nulo. Por definición A es L.D.

$(\Rightarrow)$ Ahora, sabiendo que A es L.D. y que $v_1 \neq \vec{0}$, hay que probar que algún v_k es combinación de los $k-1$ vectores anteriores de A. Como A es L.D. existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ no todos nulos tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}.$$

Sea k el mayor i tal que $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j > i$. Por definición $\lambda_k \neq 0$ y $k > 1$, sino $\lambda_1 v_1 = \vec{0}, \ \lambda_1 \neq 0 \ \Rightarrow \ v_1 = \vec{0}$ (contrario a la hipótesis). Entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \vec{0}$ y despejando, $\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{k-1} v_{k-1}$ y como $\lambda_k \neq 0$ se deduce que:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}.$$

Entonces v_k es combinación lineal de $v_1, \dots, v_{k-1}$ como se quería probar. $\square$

OBSERVACIÓN 6.19. De la proposición anterior se deduce en particular que un conjunto es L.D. si y sólo si un vector es combinación lineal de los demás.

COROLARIO 6.20. *Sea V un espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un subconjunto cualquiera. Entonces A es L.I. si y solo si ningún vector de A es combinación lineal de los restantes.*

6.5. Base de un espacio vectorial y dimensión.

La idea central de la Geometría Analítica es que fijado un sistema de coordenadas, a cada punto del espacio le corresponde una única terna ordenada de números reales. Esto correspondencia permite tratar de manera analítica los objetos geométricos del espacio (i.e. asociar a cada uno de ellos una ecuación) tal como vimos en el Capítulo **??**. En la construcción que allí hicimos, no solo asociábamos coordenadas a los puntos del espacio E sino que también asociábamos coordenadas a los vectores del espacio V. Veamos como es posible generalizar esto a un espacio vectorial cualquiera.

DEFINICIÓN 6.7 (Base de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ (A finito). Decimos que A es **base** de V si y sólo si:

a) A es un conjunto L.I.
b) A es generador de V, es decir $[A] = V$.

Notación: Si V es un espacio vectorial y B es una base de V pondremos $B \xrightarrow{b} V$.

OBSERVACIÓN 6.21. Sea $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $S \subset V$ un subespacio de V. Ya hemos visto que $(S, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es él mismo un espacio vectorial, donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones que hereda de V (Teorema 6.12). Una **base del subespacio** S es una base del espacio vectorial $(S, \mathbb{K}, +, \cdot)$.

PROPOSICIÓN 6.22. *Sea V un espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un subconjunto cualquiera. Entonces A es base de V si y solo si, todo vector del espacio se escribe en forma única como c.l. de los vectores de A (es decir, los coeficientes de la c.l. son únicos).*

DEMOSTRACIÓN. $(\Rightarrow)$ En primer lugar, como A genera a V, cualquier vector de V se puede escribir como c.l. de vectores de A. Veremos ahora que esa combinación lineal es única.

En efecto, supongamos que pueda escribirse un vector v como combinación lineal de A, en dos formas distintas:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \quad \text{y} \quad v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n.$$

Restando ambas igualdades tenemos:

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\, v_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\, v_n.$$

La anterior es entonces una forma de escribir el vector nulo como c.l. de A. Como por hipótesis A es base, en particular A es L.I. Por definición de conjunto L.I. los coeficientes de la combinación lineal anterior deben ser todos ceros y por lo tanto:

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Consecuentemente las dos formas de escribir v como combinación lineal de A, son la misma.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que cada vector de V se escribe de manera única como combinación lineal de A, entonces en particular $A \xrightarrow{g} V$. Para verificar que A es base, sólo resta ver que A es L.I. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares tales que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}.$$

Hemos escrito el vector nulo como combinación lineal de A. Por otra parte también se tiene que:

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = \vec{0}.$$

Pero como cada vector (incluyendo al nulo) sólo se puede escribir de forma única como combinación lineal de A, debe ser $\lambda_i = 0,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ y consecuentemente A es L.I. $\square$

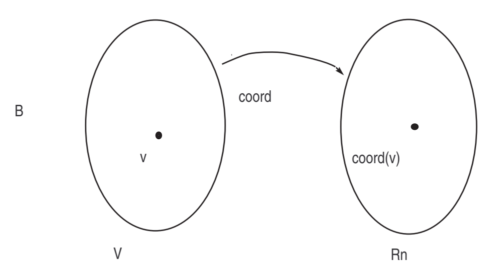
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita (cualquiera) sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. Dado un vector cualquiera $v \in V$, la proposición anterior establece que existen únicos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Llamaremos a estos números las **coordenadas en la base** B del vector v. De hecho con un poco más de formalidad podemos definir la función $coord_B : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$, tal que a cada vector v le hace corresponder los coeficientes de la combinación lineal de B que da v. Esto es

$$coord_B(v) \stackrel{def}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Obsérvese que el vector v es un elemento del espacio V pero sus coordenadas, sin importar quien sea V, son siempre una n-upla de escalares.



EJEMPLO 6.37. Sea $V=(\mathbb{R}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$ (o $(\mathbb{C}^n,\mathbb{C},+,\cdot)$). El conjunto

$$\mathcal{C}=\{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),(0,0,1,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,1)\}$$

es una base de V pues es L.I. y genera V (comprobarlo). El conjunto $\mathcal{C}$ se denomina **base canónica** de $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$ o de $(\mathbb{C}^n,\mathbb{C},+,\cdot)$.
En general el i-ésimo vector de la base canónica lo notaremos

$$e_i = \quad (0,\dots,0,\overset{\substack{\text{i-ésimo}\\ \text{lugar}\\ \downarrow}}{1},0,\dots,0).$$

Sea $v=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ un vector cualquiera entonces

$$v=(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

entonces

$$coord_{\mathcal{C}}(v)=(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Esto es el vector y sus coordenadas en la base canónica coinciden. De hecho lo que ocurre es que la función $coord_{\mathcal{C}}:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es la función identidad. En general, como veremos en el próximo ejemplo, un vector de $\mathbb{R}^n$ y sus coordenadas en una base arbitraria no coinciden, esto sólo ocurre si la base considerada es la canónica. ■

EJEMPLO 6.38. Sea $V=\mathbb{R}^3$ y $B=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es fácil comprobar y queda a cargo del lector que B es L.I. Verifiquemos que también genera $\mathbb{R}^3$. En efecto sea $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ un vector arbitrario, comprobemos que existen $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ escalares tales que

$$(a,b,c)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)\iff$$

$$(a,b,c)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3)\iff$$

$$\begin{cases}\alpha_1=a\\ \alpha_1+\alpha_2=b\\ \alpha_3=c\end{cases}$$

y este último sistema es compatible determinado y tiene solución $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b - a$ y $\alpha_3 = c$ de donde $B \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ y por lo tanto es base. Además

$$(a, b, c) = a(1, 1, 0) + (b - a)(0, 1, 0) + c(0, 1, 0)$$

por lo tanto

$$coord_B\big((a, b, c)\big) = (a, b - a, c).$$

Por ejemplo si $v = (1, 2, 1)$ entonces $coord_B\big((1, 2, 1)\big) = (1, 1, 1)$.
En el otro sentido, supongamos que $w \in \mathbb{R}^3$ es un vector tal que sus coordenadas en la base B son $coord_B(w) = (1, 2, 1)$. Entonces el vector w es:

$$w = 1(1, 1, 0) + 2(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, 3, 1).$$

■

Es claro que si $V = \mathbb{R}^n$ tanto los vectores como sus coordenadas son n-uplas, por lo cual cabe la posibilidad de confundirlos, lo cual naturalmente constituye un grave error.
Hay que aclarar en cada caso, cuando se da una n-upla de $\mathbb{R}^n$, si se trata de los vectores en sí, o si se trata de las componentes en alguna base distinta de la canónica. Sólo puede omitirse esta aclaración cuando la base es la canónica. Cuando decimos por ejemplo sea v el vector de $\mathbb{R}^3$ tal que $v = (1, 2, 3)$ estamos indicando la 3-upla $(1, 2, 3)$, por lo que no tiene sentido preguntar en que base lo estamos expresando.

EJEMPLO 6.39. Sea $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Verifíquese que $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$ **no** es base.

Sugerencia: El vector $(i, 0, ..., 0)$ donde i es la unidad imaginaria no es c.l. del conjunto anterior. Verifíque que:

$$\mathcal{C}' = \{(1, 0, \ldots, 0), (i, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), (0, i, \ldots, 0), \ldots$$
$$\ldots, (0, 0, \ldots, 1), (0, 0, \ldots, i)\}$$

es base de $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

EJEMPLO 6.40. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

entonces $A \xrightarrow{b} \mathcal{M}_{2\times 2}$, pues es un conjunto L.I. (verificarlo) y además si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz 2×2 cualquiera, se tiene que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde $A \xrightarrow{g} \mathcal{M}_{2\times 2}$ y por lo tanto es base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Además $coord_A(M) = (a, b, c, d)$. Obsérvese que aquí no hay posibilidad de confundir los vectores con sus coordenadas pues los primeros son matrices y los segundos 4-uplas de números.

EJEMPLO 6.41. Sea $V = \mathbb{R}_n[x]$ y $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, donde $p_i(x) = x^i$, con $i = 0, \ldots, n$. Entonces A es L.I. (verificarlo) y además si $p \in \mathbb{R}_n[x]$ es tal que $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces

$$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$$

por lo tanto $A \xrightarrow{g} \mathcal{P}_n$ y en consecuencia A es base de $\mathcal{P}_n$. Además se tiene que $coord_A(p) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Nuevamente aquí no hay posibilidad de confundirse coordenadas y vectores; las primeras son $(n+1)$-uplas y los segundos son polinomios de grado menor o igual a n. ■

EJEMPLO 6.42. Sea $S = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}$. Deseamos determinar una base de S. Para esto comencemos hallando un generador. Observemos que $v \in S$ si y solo si existen x y y reales tales que:

$$v = (x, y, y - 2x) = (x, 0, -2x) + (0, y, y) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1).$$

Entonces $A = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\} \subset S \xrightarrow{g} S$. Además es fácil ver (hacerlo) que A es L.I. y por lo tanto una base de S. ■

EJEMPLO 6.43. Sea $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \,:\, A = A^t\}$. Hemos visto en el Ejemplo 6.29 que el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{g} S$$

y de lo visto en el Ejemplo 6.34 A es L.I. Por lo tanto $G \xrightarrow{b} S$. ■

TEOREMA 6.23. *Sea V un espacio vectorial. Sea $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto que genera a V y $B = \{w_1, \ldots, w_m\}$ un conjunto L.I. de V. Entonces $m \leqslant n$.*

DEMOSTRACIÓN. La idea de la pruebe consiste en construir un algoritmo que permita sustituir uno a uno los vectores de A con los de B. En cada paso al sustituir un vector de A por uno de B, se obtiene un nuevo conjunto generador del espacio V. Como el proceso de sustitución no culmina mientras queden elementos en el conjunto B, se prueba que en B hay por lo menos tantos elementos como en A.
En el primer paso del algoritmo elegiremos un vector conveniente de A y lo sustituiremos el vector w_m. Para esto comencemos observando que $A \xrightarrow{g} V$ y por lo tanto $w_m \in B \subset V$ es combinación lineal de A. En consecuencia el conjunto

$$A_1' = \{w_m, v_1, \ldots, v_n\}$$

es L.D. Ahora bien, $w_m \neq \vec{0}$, pues $w_m \in B$ y B es L.I. por lo tanto la Proposición 6.18 asegura que existe en A_1' un vector (que no es el primero) que resulta combinación de los anteriores. Designemos por $v_i \in A$ a ese vector, que será el primero a sustituir. Pongamos, ahora

$$A_1 = A_1' - \{v_i\} = \{w_m, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}.$$

Entonces $A_1 \xrightarrow{g} V$, pues, en virtud de la Proposición 6.16 $[A_1] = [A_1'] = V$. En definitiva al cabo del primer paso se ha obtenido un nuevo conjunto generador de V substituyendo v_i por w_m.
Para el segundo paso razonamos en forma análoga eligiendo otro vector de

A para ser sustituido por w_{m-1}: como $A_1 \xrightarrow{g} V$ y $w_{m-1} \in B$ es combinación lineal de A_1, el conjunto

$$A_2' = A_1 \cup \{w_{m-1}\} = \{w_{m-1}, w_m, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

resulta L.D. De nuevo observamos que $w_{m-1} \neq \vec{0}$, pues $w_{m-1} \in B$ y B es L.I., por lo tanto la Proposición 6.18 asegura que existe un vector en A_2' (que no es el primero) que resulta combinación lineal de los restantes. Este vector no puede ser w_m pues si lo fuera debería ser combinación de w_{m-1} y esto contradice la independencia lineal de B. Designemos por $v_k \in A$ a dicho vector (será el segundo vector a sustituir). La Proposición 6.16 implica nuevamente que el conjunto

$$A_2 = A_2' - \{v_k\} = \{w_{m-1}, w_m, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$$

es un generador de V. Al cabo de dos pasos hemos sustituido dos vectores de A por dos vectores de B y lo hemos hecho de modo que el conjunto resultante A_2 es un generador de V. Podemos continuar este procedimiento de sustitución y el mismo sólo concluirá cuando se terminen los vectores de B. Cuando esto ocurra o bien los vectores de A se han acabado en simultáneo con los de B y entonces $m = n$ o bien aún restan vectores de A sin sustituir y por lo tanto $m < n$ lo cual concluye la prueba. □

COROLARIO 6.24. *Sea V un espacio vectorial. Si una base tiene n elementos, entonces todas las demás bases tienen n elementos.*

Demostración. Sean A y B bases de V, A con n elementos y B con p elementos. Como A es L.I. y B es generador, aplicando el Teorema 6.23 tenemos $n \leq p$. Por otra parte, como B es L.I. y A es generador, aplicando nuevamente el Teorema 6.23, tenemos $p \leq n$. O sea $n = p$. □

DEFINICIÓN 6.8 (Dimensión de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial. Si existe una base de V que tenga n elementos, se dice que n es la **dimensión** de V (obsérvese en virtud del corolario anterior que n no depende de la base que se halla encontrado). Notaremos $dim\ (V) = n$.

Si $V = \left\{\vec{0}\right\}$ (ver Ejemplo 6.11), se conviene en decir que V tiene dimensión 0. Si $V \neq \left\{\vec{0}\right\}$ y no existe una base de Vcon una cantidad finita de elementos, entonces decimos que la dimensión de V es infinita. Obsérvese que si un espacio vectorial V contiene un subconjunto L.I. L con infinitos elementos entonces $dim(V) = \infty$. En efecto, V no puede tener una base finita pues si $A \subset V$ es un subconjunto finito y $A \xrightarrow{b} V$ entonces en particular $A \xrightarrow{g} V$ pero como L es L.I. y posee infinitos elementos, podemos encontrar un subconjunto finito $L' \subset L$ que sea L.I. con $card(L') > card(A)$ lo cual contradice el Teorema 6.23.

OBSERVACIÓN 6.25. Naturalmente si $S \subset V$ es un subespacio del espacio $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ entonces su dimensión es la dimensión de $(S, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Esto es el número de elementos de una base de S (ver Observación 6.21).

EJEMPLO 6.44. En el Ejemplo 6.37 vimos que $\mathcal{C}$ es una base (la base canónica) de $\mathbb{R}^n$ por lo tanto $dim(\mathbb{R}^n) = n$. De manera análoga $\mathcal{C} \xrightarrow{b} (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)$ por lo tanto $dim\big((\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, +, \cdot)\big) = n$. Por el contrario en el Ejemplo 6.39 se vio que $\mathcal{C}$ no es base de $(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ pero si lo es

$$\mathcal{C}' = \{(1, 0, \ldots, 0), (i, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), (0, i, \ldots, 0), \ldots \\ \ldots, (0, 0, \ldots, 1), (0, 0, \ldots, i)\}$$

de donde $dim\big((\mathbb{C}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)\big) = 2n$. Obsérvese que al cambiar el cuerpo, aunque no hayamos cambiado el conjunto de vectores, el espacio vectorial cambia radicálmente al punto que cambia su dimensión. En los ejercicios veremos que incluso hay ejemplos en los cuales un espacio de dimensión finita puede transformarse en uno de dimensión infinita cambiando sólo el cuerpo. ■

EJEMPLO 6.45. De lo visto en los Ejemplos 6.40 y 6.41 se deduce que $dim(\mathcal{M}_{2\times 2}) = 4$ y $dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{M}_{m\times n}$? ■

EJEMPLO 6.46. Sean $S = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ y S' el subespacio de las matrices 2×2 simétricas. De los Ejemplos 6.42 y 6.43 se deduce que existen respectivamente una base de S con 2 elementos y una base de S' con 3 elementos, por lo tanto $dim(S) = 2$ y $dim(S') = 3$. ■

El siguiente resultado da otra caracterización de una base, de hecho afirma que un base es un conjunto L.I. "maximal" en el sentido de que cualquier otro conjunto más grande debe ser L.D.

TEOREMA 6.26. *Sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Entonces A es base si y sólo si A es L.I. y todo conjunto con más de n vectores es L.D.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Para probar que A es base, alcanza probar que A es generador de todo el espacio, puesto que A es L.I. por hipótesis. Para esto veremos que cualquier vector puede ponerse como combinación lineal de A. Es claro que los vectores de A son ellos mismos combinación de A así que consideremos un vector $v \in V$ cualquiera tal que $v \notin A$, entonces el conjunto $A' = A \cup \{v\}$ tiene $n + 1$ elementos y en consecuencia es por hipótesis un conjunto L.D. Entonces existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda v = \vec{0}. \tag{6.45}$$

Veamos que debe ser $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$ se tendría que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{0}$$

con algún escalar distinto de cero y esto contradice la independencia lineal de A asegurada por hipótesis. Entonces tenemos $\lambda \neq 0$. Despejando v en (6.45) se tiene:

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n.$$

Hemos probado que v es c.l. de A. Como v es un vector cualquiera de V, se tiene que $A \xrightarrow{g} V$, como queríamos probar.

($\Rightarrow$) Tenemos que probar que todo conjunto con más de n vectores es L.D. Como por hipótesis que A es base, en particular A es generador de

V. Sea $W \subset V$ un conjunto cualquiera con m vectores $m > n$. Si W fuera L.I. tendríamos un conjunto L.I. con más elementos que un generador y esto contradice el Teorema 6.23. Por lo tanto W debe ser L.D. □

EJEMPLO 6.47. Sea $A = \{x^2+x-1, x+1, x^2+3x-3, x^2-1, -x^2+2x+1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$. Entonces A es L.D. pues $dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$ y $card(A) = 5$. ■

OBSERVACIÓN 6.27. De hecho si $m > n$ cualquier conjunto de $\mathbb{R}^n$ con m vectores es necesariamente L.D. Obsérvese que si $m < n$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con m vectores puede ser tanto L.D. como L.I. (verifique esto construyendo ejemplos de ambas situaciones).

OBSERVACIÓN 6.28. Sea A un subconjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. En el Capítulo 2 habíamos definido el concepto de rango del conjunto como la mayor cantidad de vectores de A que fueran linealmente independientes. Ahora podemos observar que el rango de A no es otra cosa que la dimensión del subespacio generado por A. En particular el rango de una matriz es la dimensión del subespacio generado por las filas o por las columnas de la misma.

Los siguientes resultados son útiles para construir bases de subespacios.

TEOREMA 6.29. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$, y sean A y B subconjuntos de V (finitos).*

Se cumplen las siguientes propiedades:

1) *Si B genera a V, existe B' contenido en B, tal que B' es base de V.*
2) *Si A es L.I., existe A' que contiene a A, tal que A' es base de V (dicho de otra forma, todo conjunto generador, contiene a alguna base; y todo L.I. se puede agrandar hasta formar una base).*

Demostración. 1) Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Si B es L.I., entonces es base (porque por hipótesis B genera a V). Si B es L.D., o bien está formado por un único vector, que tiene que ser el vector nulo (porque B es L.D.), o bien está formado por más de un vector. En el caso en que $B = \left\{\vec{0}\right\}$, como por hipótesis B genera a V, sería el caso en que $V = \left\{\vec{0}\right\}$. Pero este caso está excluido, porque por hipótesis $n \geq 1$. De esta forma, resta sólo estudiar el caso en que B es L.D. y está formado por más de un vector. Por la Proposición 6.18 existe un vector $v_r \in B$ que es combinación lineal de los demás vectores de B. Quitando ese vector v_r de B, se obtiene un conjunto B_1. Por la Proposición 6.16, $[B] = [B_1]$ y entonces B genera a V.

Si B_1 es L.I: ya está probado. Si es L.D. aplicando el mismo razonamiento a B_1 en lugar de B, se obtiene un nuevo conjunto $B_2 \subset B_1 \subset B$ tal que B_2 genera a V. Si se repite el razonamiento, se obtendrá finalmente un conjunto B*'* contenido en B, que es L.I. y que se obtuvo de B retirando sucesivamente aquellos vectores que se expresaban como combinación lineal de los restantes. Por la Proposición 6.16, este conjunto B*'* también genera a V. Por definición es base de V, probando el punto 1).

2) Supongamos que $A = \left\{w_1, \ldots, w_p\right\}$ es un conjunto L.I. Si A genera a V, entonces A es base y tomamos A*'* $= A$. Si A no genera a V, entonces existe algún vector de V que no es combinación lineal de A. Llamemos w_{p+1} a este vector. Mostremos que: $\left\{w_1, w_2, \ldots, w_p, w_{p+1}\right\}$ es L.I.

En efecto: $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_p w_p + \lambda_{p+1} w_{p+1} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_{p+1} = 0$, porque sino se podría despejar w_{p+1} en función de los demás, y eso no es posible porque w_{p+1} no es c.l. de $w_1, w_2, \ldots, w_p$. Entonces: $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + ... + \lambda_p w_p = \vec{0}$. Luego, todos los coeficientes λ_i son ceros, porque A es L.I. Tenemos entonces que el conjunto $A = \left\{w_1, w_2, \ldots, w_p, w_{p+1}\right\}$ es L.I. Repitiendo la construcción anterior a A_1 en lugar de A, vamos agregando vectores hasta obtener un conjunto L.I. y que genere a V (o sea hasta obtener una base de V). Siempre se llega (en una cantidad finita de pasos) a un conjunto que genere a V, porque por el Teorema 6.26 los conjuntos L.I. no pueden tener mas de n elementos, donde n es la dimensión del espacio. $\square$

El siguiente resultado es particularmente útil cuando se desea encontrar una base de un espacio del cual se conoce la dimensión. De hecho en este caso solo es necesario chequear la cantidad de vectores del conjunto candidato y su independencia lineal.

COROLARIO 6.30. *Sea V un espacio vectorial de* ***dimensión n****. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Todo conjunto L.I. de n vectores es base.*
2) *Todo conjunto de n vectores que genera a V es base.*

DEMOSTRACIÓN. 1) Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. Supongamos que A no genera V. Entonces existe $v \in V$ tal que $v \notin [A]$. Entonces $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ es L.I. (como en la demostración del teorema anterior) pero tiene $n + 1$ vectores, lo que contradice el Teorema 6.26. Luego $[A] = V$.

2) Sea $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $A \xrightarrow{g} V$. Si A es L.D. aplicando el Teorema 6.29 se sabe que existe $A_1 \subsetneq A$ tal que $A_1 \xrightarrow{b} V$, y $card(A_1) = p < n$. Luego $dim\ (V) = p < n$. Absurdo. $\square$

EJEMPLO 6.48. Sea $A = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$. Es fácil de verificar que A es L.I. y como $card(A) = 4 = dim(\mathbb{R}^4)$, tenemos que A es base de $\mathbb{R}^4$. $\blacksquare$

EJEMPLO 6.49. Sea $S = [(1, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)]$, hallar una base de S y determinar su dimensión. Para esto comenzamos por encontrar un generador, lo cual obviamente es inmediato, el conjunto

$$A = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

es por definición un generador de S. Como desconocemos la dimensión del subespacio no podemos aplicar el Corolario 6.30 y debemos verificar si A es L.I. o no. Es fácil de ver que A es L.D. pues $(1, 1, 1) - (2, 1, 0) = (-1, 0, 1)$. Entonces A no es base, pero del Teorema 6.29 existe $A' \subset A$ que si lo es. Como el vector $(-1, 0, 1)$ es c.l. de los restantes elementos de A, por la

Proposición 6.16, $A' = \{(1,1,1),(2,1,0)\} \xrightarrow{g} S$. Es fácil verificar además que A' es L.I. En consecuencia $A' \xrightarrow{b} S$ y por lo tanto $dim(S) = 2$. ■

EJEMPLO 6.50. Sea $A = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ donde $q_1(x) = x + 1$, $q_2(x) = x^2 + x - 1$, $q_3(x) = x^2 + 2x$ y $q_4(x) = x^2 - 2$. Analicemos ahora el subespacio $S = [A] \subset \mathbb{R}_2[x]$. Queremos determinar la dimensión de S. Para eso encontraremos una base del subespacio. Por definición $A \xrightarrow{g} S$, pero por lo visto en el Ejemplo 6.35 el conjunto A es L.D., por lo cual debe contener propiamente un subconjunto que sea base. Para determinar este subconjunto procedemos como en la prueba del Teorema 6.29 y determinemos un conjunto $A' \subsetneq A$ tal que $[A'] = [A]$ eliminando de A un vector que sea combinación de los restantes. Sabemos del Ejemplo 6.35 que q_4 es combinación de los restantes elementos de A y en consecuencia consideramos $A' = \{q_1, q_2, q_3\}$. En este caso es fácil ver que $q_3 = q_1 + q_2$ por lo tanto A' es también L.D. Eliminando q_3 tenemos que $A'' = \{q_1, q_2\} \xrightarrow{g} S$ y como el lector comprobará A'' es L.I. y por lo tanto una base de S. Entonces $dim(S) = 2$. ■

PROPOSICIÓN 6.31. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Sea W un subespacio de V. Entonces W tiene también dimensión finita, que es menor o igual que n.*

Demostración. Si $W = \left\{\vec{0}\right\}$, entonces dim $W = 0$ y ya está probado, pues $0 \leq n$.

Si $W \neq \left\{\vec{0}\right\}$, alcanza probar que existe una base de W con una cantidad finita de elementos p. Una vez demostrado esto, por el Teorema 6.23 resulta $p \leq n$, pues una base de W, es un conjunto L.I., con p elementos, y una base de V es un conjunto que genera a todo el espacio, con n elementos.

Como $W \neq \left\{\vec{0}\right\}$ existe algún vector $w_1 \in W$, $w_1 \neq \vec{0}$. Si $\{w_1\}$ genera a W, es base de W, y ya está probado. Si $\{w_1\}$ no genera a W, existe un vector $w_2 \in W$ que no es combinación lineal de w_1.

Afirmamos que $\{w_1, w_2\}$ es L.I. En efecto, si $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \vec{0}$, $\lambda_2 = 0$ pues de lo contrario se podría despejar w_2 en función de w_1, lo cual no es posible porque w_2 no es combinación lineal de w_1. Luego $\lambda_2 = 0$, y entonces $\lambda_1 w_1 = \vec{0}$. Como $w_1 \neq \vec{0}$ se deduce $\lambda_1 = 0$. Tenemos ahora que $\{w_1, w_2\}$ es L.I. Si genera a W, ya tenemos una base. Si no genera a W, existe un tercer vector $w_3 \in W$ que no es combinación lineal de los dos primeros. Igual que antes se prueba que el conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ es L.I. Se puede repetir el razonamiento en una cantidad menor que $n+1$ de pasos hasta construir una base de W, porque de lo contrario tendríamos un conjunto L.I. de $n + 1$ vectores, contradiciendo el Teorema 6.26 que dice que los conjuntos L.I. no pueden tener más de n elementos, donde n es la dimensión del espacio. $\square$

PROPOSICIÓN 6.32. *Sea W un subespacio de V, con $dim\,(V) = n$. Si $dim\,(W) = dim\,(V)$, entonces $W = V$.*

Demostración. Sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W. Entonces es L.I. y está formado por n vectores de $W \subset V$. Si $v \in V$; $\{w_1, \ldots, w_n, v\}$ es L.D. (por Teorema 6.26) y como antes, vemos que v se escribe como combinación lineal de $\{w_1, \ldots, w_n\}$, luego $\{w_1, \ldots, w_n\} = V$. $\square$

6.6. Suma de subespacios y suma directa.

DEFINICIÓN 6.9 (Suma de subespacios). Sea V un espacio vectorial. se llama **suma** de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de V, (y se denota como $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$) al subconjunto de vectores W definido por:

$$W = \{v \in V : \exists v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \ldots, v_n \in V_n \;/\; v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}.$$

TEOREMA 6.33. *La suma de subespacios de V es un subespacio de V.*

Demostración. Sea $W = V_1 + \cdots + V_n$, donde V_i es un subespacio de V, $\forall i = 1, \ldots, n$. Es fácil ver que $\vec{0} \in W$, porque $\vec{0} = \vec{0} + \cdots + \vec{0}$ y $\vec{0} \in V_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. También es sencillo verificar que si un vector u se puede descomponer como suma de un vector de V_1 más uno de V_2, ..., más uno de V_n, entonces λu también se descompone de esa forma, lo que demuestra que W es cerrado con respecto al producto por escalares. Para verificar que W es cerrado respecto a la suma sean u y u' tales que $u = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ y

$u' = v'_1 + v'_2 + \cdots + v'_n$, con $v_1, v'_1 \in V_1$; $v_2, v'_2 \in V_2; \ldots ; v_n, v'_n \in V_n$. Entonces $u + u' = (v_1 + v'_1) + (v_2 + v'_2) + \cdots + (v_n + v'_n)$, donde $v_1 + v'_1 \in V_1$; $v_2 + v'_2 \in V_2$; $\ldots$; $v_n + v'_n \in V_n$, porque $V_1, V_2, \ldots, V_n$ son subespacios de V. $\square$

DEFINICIÓN 6.10 (Suma directa). Dados los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$, el subespacio suma de ellos se llama **suma directa** cuando todo vector de él puede expresarse de forma única como suma de vectores de los subespacios $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Cuando la suma es directa se representa $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$.

EJEMPLO 6.51. Sean en $\mathbb{R}^3$ los subespacios $V_1 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_3 = 0\}$ y $V_2 = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 = 0\}$. Todo vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como suma de un vector de V_1 y uno de V_2, pero no de forma única:

$$(1,1,1) = (1,1,0) + (0,0,1)$$

$$(1,1,1) = (1,1/2,0) + (0,1/2,1)$$

Entonces la suma de V_1 y V_2 es todo $\mathbb{R}^3$. Pero esta suma no es directa.

TEOREMA 6.34. *Si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ y si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son bases de $V_1, V_2, ..., V_n$ respectivamente, entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$ es una base de V.*

Demostración. Probaremos que B genera a V, y que B es L.I.

Todo vector de V es suma de vectores de $V_1, V_2, \ldots, V_n$, y a su vez, estos son combinaciones lineales de sus respectivas bases. Entonces v es c.l. de la unión de esas bases, que es B. Hemos probado que todo vector de V es combinación lineal de B, o sea B genera a V. Veamos que B es L.I. Sea $B_1 = \left\{v_{11}, v_{12}, ..., v_{1p_1}\right\}$; $B_2 = \{v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{1p_2}\}$;$\cdots$; $B_n = \left\{v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{np_n}\right\}$. Tomemos una combinación lineal de B igualada a $\vec{0}$:

$$\begin{aligned} a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} + \ldots &+ a_{1p_1}v_{1p_1} + a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} + \ldots \\ + a_{2p_2}v_{2p_2} + \cdots + a_{n1}v_{n1} &+ a_{n2}v_{n2} + \cdots + a_{np_n}v_{np_n} = \vec{0}; \end{aligned}$$

como $\vec{0} \in V$ y $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$, existe una única manera de expresar el vector nulo como suma de vectores de $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Esa única manera tiene que ser entonces $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$. La combinación lineal de más arriba implica entonces que:

$$a_{11}v_{11} + a_{12}v_{12} + \cdots + a_{1p_1}v_{1p_1} = \vec{0}$$
$$a_{21}v_{21} + a_{22}v_{22} + \cdots + a_{2p_2}v_{2p_2} = \vec{0}$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}v_{n1} + a_{n2}v_{n2} + \cdots + a_{np_n}v_{np_n} = \vec{0}.$$

Siendo B_1 una base de V_1, se tiene que B_1 es L.I. y de la primera igualdad de más arriba se deduce $a_{11} = a_{12} = ... = a_{1n} = \vec{0}$. Análogamente para los demás coeficientes a_{ij}. Entonces tenemos probado que B es L.I. $\square$

COROLARIO 6.35. *Si V es suma directa de $V_1, V_2, \ldots, V_n$ entonces $dimV = dimV_1 + dimV_2 + \cdots + dimV_n$.*

Demostración. Es inmediata a partir de la definición de dimensión y del teorema anterior. $\square$

PROPOSICIÓN 6.36. *Sean V_1 y V_2 dos subespacios de V tales que $V = V_1 + V_2$. Entonces $V_1 \cap V_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ si y sólo si $V = V_1 \oplus V_2$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos $v = v_1 + v_2$ y $v' = v_1' + v_2'$ con $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$. Luego, $v_1 - v_1' = v_2 - v_2' \in V_1$ y V_2, por lo que, por hipótesis $v_1 - v_1' = v_2 - v_2' = \vec{0}$, lo que prueba que la suma es directa.

($\Leftarrow$) Sea $v \in V_1 \cap V_2$. Luego $-v \in V_1 \cap V_2$. Por lo tanto:

$\vec{0} = v + (-v) = \vec{0} + \vec{0}$ y por definición de suma directa, $\vec{0} = v = -v$. Entonces $V_1 \cap V_2 = \left\{\vec{0}\right\}$. $\square$