

## RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

### 4.1. Introducción.

El propósito del presente capítulo -y del capítulo denominado *Producto Escalar y Vectorial*- es dar una presentación sucinta de la Geometría Analítica del Espacio, que permita trabajar matemáticamente con los objetos del **espacio ambiente**. En un sentido muy vago y deliberadamente informal entendemos por tal al modelo espacial en que transcurren la mayoría de los fenómenos analizados por la Mecánica y otras teorías científicas Clásicas. Estas teorías se refieren a los acontecimientos más o menos directamente percibidos por los seres humanos.

Esta presentación incluirá la formalización del concepto de vector que el lector conoce de sus cursos de Nivel Secundario. Por un lado, en los cursos de Geometría ha trabajado con las traslaciones que, como recordará, están determinadas por vectores. En general el vector se define en esos cursos como una clase de equivalencia de segmentos orientados con la misma dirección, sentido y congruentes (dos figuras son congruentes si se corresponden por una isometría).

Por otro lado, en Física ha trabajado con ciertas “magnitudes” (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) llamadas “vectoriales”. Estas se distinguen claramente de otras llamadas “escalares” (masa, temperatura, etc.) porque las últimas quedan determinadas por un único dato numérico, en cambio las primeras requieren más información para caracterizarlas: “módulo”, “dirección” y “sentido”. Las magnitudes vectoriales se representan además gráficamente mediante una “flecha” y a pesar de las diferencias que ya marcamos con los “escalares” tienen algo en común: con ambos se realizan operaciones.

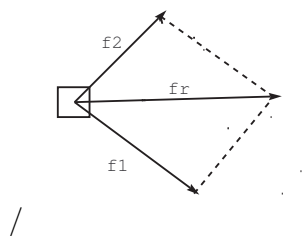


FIGURA 1.

Por ejemplo cuando se aplican dos fuerzas  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  sobre un mismo cuerpo el resultado es el mismo que si se aplicara una única fuerza  $\vec{F}_r$  con módulo, dirección y sentido igual a la diagonal del paralelogramo de lados  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  (ver Figura 4.1). Se dice entonces que

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

o que  $\vec{F}_r$  es la resultante de  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$ , de este modo la “suma de vectores” cobra sentido. Si  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$  entonces  $\vec{F}_r = 2\vec{F}_1$  con lo cual también cobra sentido la multiplicación de escalares por vectores.

Nuestra intención es introducir el concepto de “vector” de una manera más rigurosa y utilizarlo para desarrollar algunas aplicaciones a la Geometría Analítica del Espacio. Al mismo tiempo queremos destacar que este concepto de vector servirá de fuente de inspiración para uno de los objetos fundamentales de este curso. Más adelante daremos una definición más general y abstracta de vector perteneciente a un **espacio vectorial** con múltiples aplicaciones dentro y fuera de la matemática. Este tipo de procesos de generalización desde ejemplos hacia conceptos abstractos permite dar un tratamiento unificado a múltiples objetos a menudo de apariencia disímil pero con propiedades esenciales comunes. Para poder hacerlos se debe estudiar con cuidado los ejemplos sencillos tratando de destacar estas propiedades.

## 4.2. Vectores.

El espacio ambiente, que denotaremos con la letra  $E$ , está formado por puntos designados en general con letras mayúsculas  $A, B, P, Q, \dots$ . Dos puntos distintos definen una única recta y tres puntos no contenidos en una recta definen un plano. En este capítulo se dará una descripción analítica de recta, plano y sus relaciones de intersección.

La longitud del segmento entre dos puntos de  $E$  define la **distancia entre dos puntos**  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , que satisface:

- $d(A, B) = d(B, A), \forall A, B \in E$ .
- $d(A, B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ .
- $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C), \forall A, B, C \in E$ .

A este concepto elemental de distancia agregamos ahora el de **vector**. Pretendemos formalizar lo que antes hemos denominado una “flecha” como un objeto que tenga “módulo”, “dirección” y “sentido”. ¿Qué datos son necesarios para dibujarla? En principio basta indicar un par de puntos ordenados  $(A, B)$ , donde el punto  $A$  será el origen y el punto  $B$  el extremo del segmento orientado (“flecha”). Consideremos dos segmentos orientados

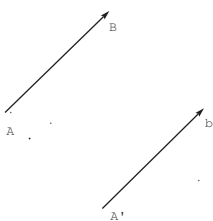
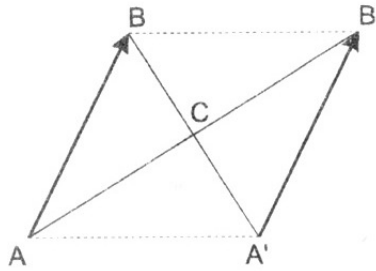


FIGURA 2.

como en la Figura 4.2 de modo que  $AA'B'B$  sea un paralelogramo, el par  $(A, B)$  es distinto de  $(A', B')$ . Sin embargo por ser  $AA'B'B$  un paralelogramo ambas segmentos orientados tienen igual dirección (las rectas  $AB$  y  $A'B'$  son paralelas), módulo ( $d(A, B) = d(A', B')$ ) y sentido. Solo se diferencian

en el punto de base o de “aplicación”. No estamos interesados en que nuestro concepto de vector distinga objetos por su punto de aplicación así que deberemos ser más cuidadosos en nuestra definición y adoptar una que **no** distinga entre dos flechas como  $(A, B)$  y  $(A', B')$ . Una manera de lograr esto es identificándolas mediante una relación de equivalencia.

Para ello definimos una relación de equivalencia entre pares ordenados de puntos de  $E$ :  $AB \sim A'B'$  si y sólo si  $ABB'A'$  es un paralelogramo. Ésta es una relación de equivalencia de acuerdo con la definición dada en el Capítulo 0.



Obsérvese que:

1. Es fácil probar que  $AB \sim A'B'$  si y sólo si el punto medio  $C$  de  $AB'$  coincide con el de  $A'B$ ; o sea que una misma simetría central de centro  $C$  lleva  $A$  en  $B'$  y  $A'$  en  $B$ .
2. También se puede dar una definición de la relación de equivalencia en término de traslaciones.
3. Todas estas definiciones sólo utilizan elementos de la geometría plana.

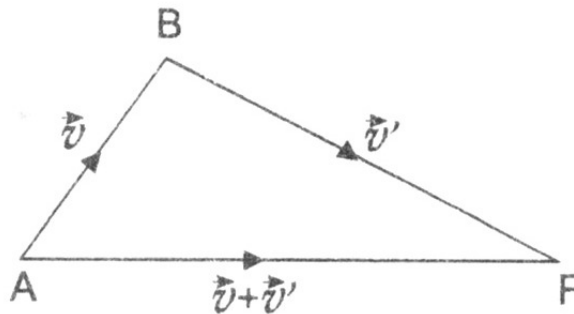
Llamaremos **vector del espacio**  $E$  a una clase de equivalencia determinada por esta relación. Cualquier pareja de puntos de una clase de equivalencia representa al correspondiente vector. Si la pareja es  $AB$ , el vector por ella representado se escribirá de cualquiera de las siguientes maneras  $v = \overrightarrow{AB} = B - A$ . Dada una representación  $AB$  de un vector  $v$  llamaremos **origen (o punto base)** al punto  $A$ , y **extremo** al punto  $B$ .

Denominaremos con la letra  $V$  al conjunto de estos vectores. Obsérvese que el espacio  $V$  incluye al vector nulo  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ , para cualquier  $A \in E$ . Dado

un punto  $P \in E$  y un vector  $v \in V$ , es claro que existe un único punto  $Q \in E$  tal que  $\overrightarrow{PQ} = v$ , o sea que hay un único representante de  $v$  que tiene origen en  $P$ : ese representante es  $PQ$ . Dado  $P$ , y si  $v$  está dado por una pareja  $AB$  (o sea  $v = \overrightarrow{AB}$ ) para hallar  $Q$  alcanza con construir el paralelogramo  $PABQ$ . De esta manera hemos definido una función que a una pareja de punto de  $E$  y vector de  $V$ , le hace corresponder otro punto de  $E$ , de la siguiente manera:  $(P, v) \rightarrow Q \iff \overrightarrow{PQ} = v$ . Escribiremos  $Q = P + v$  y diremos que  $Q$  es la **suma de  $P$  más  $v$** .

### 4.3. Operaciones con vectores.

La **suma de dos vectores** es otro vector, o sea que se trata de definir una función que a parejas de vectores le haga corresponder otro vector:  $(v, w) \rightarrow v + w$ . Dados dos vectores  $v, w \in V$ , se tomarán representantes de cada uno de ellos de modo que el extremo del representante de  $v$  sea el origen del de  $w$ . O sea, que si  $v = \overrightarrow{AB}$ , tomamos  $w = \overrightarrow{BC}$ . Decimos que  $\overrightarrow{AC}$  representa al vector suma  $v + w$ ; o sea que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .



Es fácil ver que el vector suma no depende del representante elegido para  $v$ ; o sea que si  $\overrightarrow{A'B'} = v$  (y  $\overrightarrow{B'C'} = w$ ) entonces  $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$ . Para verificar esta independencia de los representantes, se recomienda -como para casi todas las pruebas de este capítulo- hacer los dibujos correspondientes.

Conviene observar desde ya que para cualquier  $v = \overrightarrow{AB}$ , resulta  $\vec{0} + v = v + \vec{0} = v$  (alcanza con tomar el representante  $AA$  o  $BB$ , según el caso,

de  $\vec{0}$ ). Además el vector  $\overrightarrow{BA}$  sumado a  $v$  da  $\vec{0}$ :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ . Llamaremos **opuesto de  $v$**  al vector representado por  $BA$ , y lo escribiremos  $-v$ . Además (háganse los dibujos), para todo  $A, B, C, D \in E$  vale  $A - B = C - D \implies A - C = B - D$ .

Para definir el **producto de un número real por un vector** se debe andar con más cuidado, distinguiendo diferentes casos y utilizando el concepto de distancia. Se trata de definir una función  $(a, v) \rightarrow av$ , para todo  $a \in \mathbb{R}, v \in V$ . Obsérvese que no hemos indicado el producto del número real  $a$  por el vector  $v$  con ningún símbolo; sencillamente hemos colocado  $av$  juntos. Esto podría dar lugar a confusiones, pero siendo  $a$  y  $v$  elementos de conjuntos en general distintos, hemos preferido la simplificación de no usar símbolo explícito para este producto. Sea  $v = \overrightarrow{AB}$ ,

- si  $a \geq 0$ , en la semirrecta  $AB$  se elige el único  $C$  tal que  $d(A, C) = ad(A, B)$ . O sea que  $C$  está del mismo lado que  $B$  respecto a  $A$ , en la recta determinada por  $A$  y  $B$ .
- Si  $a < 0$ , se elige  $C$  en el lado opuesto al que está  $B$  respecto de  $A$ , de modo que  $d(A, C) = |a|d(A, B)$ .

En ambos casos se define  $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} = av$ . Se observa fácilmente que esta definición no depende del representante de  $v$  que se haya elegido. Obsérvese también que la multiplicación del número cero por cualquier vector da el vector nulo:  $0v = \vec{0}$ , para todo  $v \in V$ . Igualmente, el vector opuesto  $-v$  se obtiene multiplicando  $v$  por el número  $-1$ ; o sea que  $(-1)v + v = \vec{0}$ . Diremos que dos vectores  $u, v$  son **colineales** (o **paralelos** o que tienen la **misma dirección**) si  $u = av$  para algún número real  $a$ . También diremos que  $u$  es **múltiplo** de  $v$ . Si  $a > 0$  diremos que además tienen el **mismo sentido**. Si  $a = \pm 1$  tienen el mismo **módulo**. Esta definición lleva a que el vector nulo sea colineal con todo vector de  $V$ , porque el número real puede ser el cero.

Estas dos operaciones de suma de vectores y producto por un real, verifican las siguientes ocho propiedades ( $u, v, w$  son cualesquiera vectores de  $V$  y  $a, b$  son cualesquiera números reales):

- [S1] [Conmutativa]  $u + v = v + u$ ,  
 [S2] [Asociativa]  $u + (v + w) = (u + v) + w$ ,  
 [S3] [Neutro de la suma] Existe un vector  $\vec{0}$  tal que  $v + \vec{0} = v$ ,  
 [S4] [Existencia de opuesto] Existe  $-v$  tal que  $v + (-v) = \vec{0}$ ;  
 [P1] [Asociativa del producto]  $a(bv) = (ab)v$ ,  
 [P2] [Neutro del producto]  $1v = v$ ,  
 [P3] [Distributiva]  $(a + b)v = av + bv$ ,  
 [P4] [Distributiva]  $a(u + v) = au + av$ .

Obsérvese los distintos significados que tienen los productos (sus símbolos están omitidos) en [P1]; y las sumas en [P3]. Para probar estas propiedades para los vectores de  $V$  recomendamos una vez más hacer dibujos claros, aplicar bien las definiciones de cada una de las operaciones y luego aplicar propiedades elementales de geometría plana y de los números reales. Como ejemplo daremos la prueba de P1. Si  $v = \overrightarrow{AB}$ , sean  $(ab)v = \overrightarrow{AC}$  y  $a(bv) = \overrightarrow{AD}$  con  $C, D$  en la recta  $AB$ . Si  $a$  ó  $b$  es cero, el resultado es  $A = C = D$  o sea  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ . Si  $a, b$  tienen el mismo signo,  $C$  y  $D$  están en la semirrecta de origen  $A$  por  $B$  y  $d(A, C) = d(A, D) = ab$ , por lo que  $C = D$ . Si  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $C$  está en el lado opuesto a  $B$  y  $D$  también porque  $bv$  tiene sentido opuesto a  $v$  y  $a(bv)$  tiene el sentido de  $bv$ ; además  $d(A, C) = d(A, D) = |ab|$ ; por tanto  $C$  y  $D$  coinciden. Más adelante se considerarán entes matemáticos entre cuyos elementos se pueden definir operaciones que verifican este conjunto de propiedades. Se verá que sólo con ellas se puede desarrollar la teoría más simple, abstracta y abarcativa de **espacios vectoriales**. También es importante tener presente las siguientes propiedades que relacionan la suma de punto y vector con la suma de vectores ( $\forall A, B, C, D \in E$ ,  $\forall v, w \in V$ ):

1.  $A + (v + w) = (A + v) + w$ .
2.  $A + (B - A) = B$ ;  $(A + w) - A = w$ .
3.  $A + \vec{0} = A$ ;  $A - A = \vec{0}$ .
4.  $(B - A) + u = (B + u) - A = B - [A + (-u)]$ .

Como ejemplo, veremos la prueba de 4. Si  $w = (B - A) + u$ , resulta  $A + w = [A + (B - A)] + u = B + u$ , por 2. Luego  $w = (B + u) - A$  por la segunda parte de 2. Esto prueba la primera igualdad. Además  $[A + (-u)] + w = A + [-u + (B + u) - A] = A + [-u + (B - A) + u] = A + (B - A) = B$ ; se han usado sucesivamente la propiedad 1., la definición de  $w$ , la primera igualdad de 4. y la primera igualdad de 2. Entonces  $w = B - (A + (-u))$  y queda demostrada la segunda igualdad de 4.

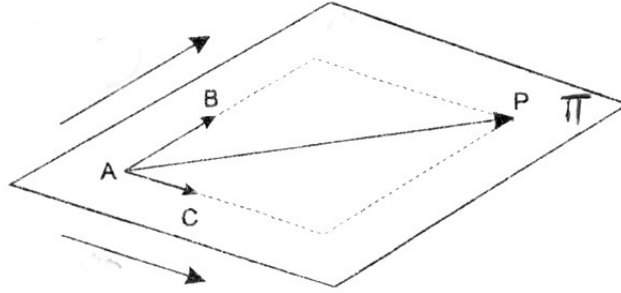
#### 4.4. Ecuaciones vectoriales de rectas y planos. Paralelismo.

**Recta.** Sea  $r$  la recta de  $E$  definida por los puntos  $A$  y  $B$ . De acuerdo con lo visto en la definición de producto de un vector por un número real, todos los puntos de esa recta quedan descriptos por  $A + \lambda \overrightarrow{AB}$ , al variar  $\lambda$  entre los números reales. O sea que todo punto  $P \in r$  es de la forma  $P = A + \lambda \overrightarrow{AB}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . También se puede dar una recta  $s$  por un punto  $A \in E$  y un vector no nulo  $v \in V$ , llamado **vector director** de la recta  $s$ . En este caso resulta  $s = \{P \in E : P = A + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ . Dos rectas con vectores directores  $v, w$  son **paralelas** si y sólo si  $v$  es colineal con  $w$ . Si además, ambas rectas paralelas tienen un punto en común, ellas son la misma recta. En efecto, si las rectas son de la forma  $A + \lambda v, B + \mu w$  con  $w = a_1 v$  y  $B = A + \lambda_1 v$ , resulta que todo punto de la segunda recta es de la forma  $B + \mu w = A + (\lambda_1 + a_1 \mu)v$ , o sea que es de la primera recta.

**Plano.** Dados tres puntos no pertenecientes a la misma recta (no colineales)  $A, B, C \in E$ , el plano  $\pi$  por ellos definido está formado por el conjunto de puntos de la forma  $A + \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . De igual manera que en caso de las rectas, un plano también queda bien definido por un punto  $A$  y dos vectores  $u, v$  no colineales. En este caso  $\pi = \{P \in E : P = A + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . Cualquier pareja de vectores  $u, v$  no colineales que definan un plano de esa manera se denominarán **vectores directores** del plano.

Dos planos  $\pi, \pi'$  son **paralelos** si todo vector con representantes definidos por dos puntos de  $\pi$ , tiene también representantes con dos puntos de  $\pi'$ . Diremos, un tanto imprecisamente, que los vectores **son** de  $\pi$  y  $\pi'$ .





Hallaremos una condición necesaria y suficiente para que dos planos  $\pi, \pi'$  de las formas  $P = A + \lambda u + \mu v$ ,  $P' = A' + a u' + b v'$ ,  $u, v$  no colineales,  $u', v'$  no colineales, sean paralelos. Obsérvese primero que todos los vectores determinados por dos puntos del plano  $\pi$  son de la forma  $\overrightarrow{AP} = \lambda u + \mu v$ . Para que los dos planos sean paralelos no es necesario que  $u, u'$  y  $v, v'$  sean colineales, sino que los vectores  $u', v'$  se puedan escribir como suma de múltiplos de  $u, v$ . En efecto si  $u' = \lambda_1 u + \mu_1 v$ ,  $v' = \lambda_2 u + \mu_2 v$  resulta que todo vector de  $\pi'$  es de la forma  $a u' + b v' = (a \lambda_1 + b \lambda_2) u + (a \mu_1 + b \mu_2) v$ ; o sea que también lo es de  $\pi$ . Si  $u'$  y  $v'$  se escriben de aquella manera como combinaciones lineales de  $u, v$ , se pueden despejar  $u$  y  $v$  de la siguiente manera:

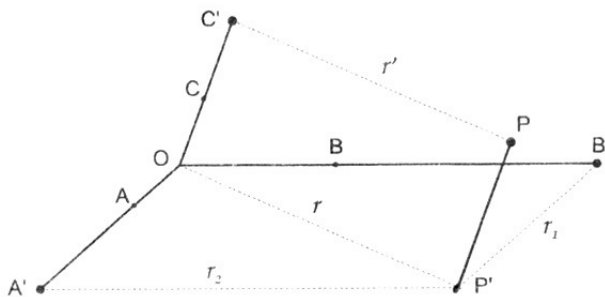
$$v = \frac{\lambda_2 u' - \lambda_1 v'}{\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2}, \quad u = \frac{-\mu_2 u' + \mu_1 v'}{\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2}$$

(que tiene sentido porque si fuera  $\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 = 0$  resultaría  $\lambda_2 u' - \lambda_1 v' = 0$  y  $u', v'$  serían colineales, lo cual contradice nuestra suposición inicial); por un razonamiento igual que el anterior resulta que todo vector de  $\pi$  también es vector de  $\pi'$ .

#### 4.5. Sistemas de coordenadas.

Comencemos con dos definiciones de gran trascendencia. Decimos que  $v$  es una **combinación lineal de los vectores**  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  si es de la forma  $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$  con  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Una **base** de  $V$  es un conjunto de vectores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  tal que todo vector  $v \in V$  se escribe *de manera única* como combinación lineal de ese conjunto. O sea, si para cada

$v \in V$  existen únicos  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tales que  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$ . Destacamos la *unicidad* de la combinación lineal de vectores de la base, para generar cada uno de los vectores de  $V$ . En un sentido que se aclarará en capítulos posteriores, una base es un conjunto mínimo que permite escribir todos los vectores de  $V$  como combinación lineal de ellos. A continuación mostraremos cómo son las bases de  $V$ .



De acuerdo con las definiciones que venimos dando, es claro que se pueden elegir cuatro puntos  $A, B, C, D \in E$  **no coplanares** (no pertenecientes a un mismo plano). Diremos también que los vectores por ellos determinados son no coplanares. O sea, los vectores  $u, v, w \in V$  son no coplanares si  $w \neq au + bv$  para cualesquiera dos números reales  $a, b$ . Esto equivale, si se toman representantes de los vectores con el mismo origen  $O$ :  $u = \overrightarrow{OA}$ ,  $v = \overrightarrow{OB}$ ,  $w = \overrightarrow{OC}$ , a que el punto  $C$  no esté en el plano determinado por  $O, A, B$ , o sea que  $C \neq O + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$  para cualesquiera números reales  $a, b$ . Sean cuatro puntos no coplanares  $O, A, B, C \in E$ . Dado cualquier punto  $P \in E$ , consideremos la recta  $s$  paralela a  $OC$  por  $P$ . Ella corta al plano  $OAB$  en  $P'$  (que coincide con  $O$  si  $P$  está en la recta  $OC$ ). Por  $P'$  trazamos las paralelas  $r_1$  y  $r_2$  a las rectas  $OA$  y  $OB$ , respectivamente, que cortan a  $OB$  y  $OA$  en  $B'$  y  $A'$ , respectivamente. Por otro lado, el plano paralelo a  $OAB$  por  $P$  corta a la recta  $OC$  en el punto  $C'$  (que coincide con  $O$  si  $P$  está en el plano  $OAB$ ). No es difícil ver, utilizando propiedades elementales de paralelismo e intersecciones, que se habría llegado a los mismos puntos  $A', B', C'$  si se hubieran trazado recta y plano paralelos a por

ejemplo la recta  $OA$  y el plano  $OBC$ , y seguido el procedimiento indicado anteriormente. Por la definición de suma de vectores aplicada dos veces, se deduce que  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ , y por la definición de producto de número real por vector, se ve el vector  $\overrightarrow{OA'}$  es colineal con  $\overrightarrow{OA}$ , por lo que  $\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}$  para algún  $a \in \mathbb{R}$ . De igual manera  $\overrightarrow{OB'} = b\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC'} = c\overrightarrow{OC}$  para  $b, c \in \mathbb{R}$ . Por tanto  $v = \overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ . Para cada  $P \in E$  (o lo que es lo mismo, cada  $v \in V$ ) los números reales  $a, b, c$  son únicos pues si fuera  $v = a'\overrightarrow{OA} + b'\overrightarrow{OB} + c'\overrightarrow{OC}$  resultaría, suponiendo que, por ejemplo  $a \neq a'$ :  $(a - a')\overrightarrow{OA} = (b' - b)\overrightarrow{OB} + (c' - c)\overrightarrow{OC}$  por lo que

$$\overrightarrow{OA} = \frac{b' - b}{a - a'}\overrightarrow{OB} + \frac{c' - c}{a' - a}\overrightarrow{OC}.$$

Entonces el punto  $A$  estaría en el plano  $OBC$  lo cual contradice la hipótesis de que los puntos  $O, A, B, C$  no son coplanares. Esta demostración vale para cualesquiera tres vectores  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  no coplanares. Por tanto hemos demostrado que *tres vectores no coplanares cualesquiera forman una base del espacio  $V$* . Recíprocamente, *si tres vectores forman una base de  $V$  ellos deben ser no coplanares*. En efecto, si fueran coplanares, tomando representantes con un mismo origen  $O$ , sus extremos determinarían un plano  $\pi$ , y ningún vector  $\overrightarrow{OP}$  con  $P \in \pi$  se podría escribir como combinación lineal de ellos.

A continuación generalizaremos el concepto de sistema de coordenadas —que el estudiante ha estudiado en el plano— al espacio  $E$ , que es el objeto principal de esta parte del curso. El estudiante recordará que los puntos de una recta se ponen en correspondencia biunívoca con los números reales, eligiendo un origen y una unidad; y que los puntos de un plano se ponen en correspondencia biunívoca con las parejas ordenadas de números reales ( $\mathbb{R}^2$ ) eligiendo un origen y dos ejes transversales que se cortan en ese origen.

Un **sistema de coordenadas o referencial de  $\mathbf{E}$**  está formado por un punto  $O$ , el **origen de coordenadas** y una base  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de  $V$ . Las rectas determinadas por  $O$  y  $v_1, v_2, v_3$  se denominan **ejes coordenados**. Si los ejes coordenados son perpendiculares se dice que el sistema de coordenadas es **ortogonal**. Se suele representar por  $Ox, Oy, Oz$  a los ejes coordenados definidos por  $O$  y  $v_1, v_2, v_3$ , respectivamente. Se llamará **plano coordenado**

$xOy$  al plano determinado por  $Ox, Oy$ . De igual manera se definen los planos coordenados  $yOz, zOx$ .

Por lo que antecede resulta que dado un sistema de coordenadas  $\{O, v_1, v_2, v_3\}$ , para cada  $P \in E$  existen números únicos  $x_1, x_2, x_3$  tales que  $P - O = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ ; luego,  $P = O + x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ . Decimos que  $x_1, x_2, x_3$  son las **coordenadas de  $P$  en el sistema  $\{O, v_1, v_2, v_3\}$** . De igual manera, si  $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ , llamaremos **coordenadas de  $v$  en la base  $\{v_1, v_2, v_3\}$**  a la terna  $(a_1, a_2, a_3)$  por lo que esta terna, dependiendo del contexto al que se refiera, indicará a las coordenadas del punto  $A = O + v \in E$ , o del vector  $v \in V$ . La determinación de un sistema de coordenadas establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del espacio  $E$  y  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto de las ternas ordenadas de números reales. Como ejemplos destacamos que el punto elegido como origen de coordenadas tiene coordenadas  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  y el punto  $O + v_1$  tiene coordenadas  $(1, 0, 0)$ . Se suele escribir  $P = (x_1, x_2, x_3)$ , para indicar que  $x_1, x_2, x_3$  son las coordenadas de  $P$  en un sistema de coordenadas en el que se está trabajando, o que se da por sobreentendido.

#### **OBSERVACIÓN 4.1.**

1. Si  $A = O + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$  y  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ , entonces  $A - O = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$  y  $A - O + v = (a_1 + x_1)v_1 + (a_2 + x_2)v_2 + (a_3 + x_3)v_3$ , por lo que  $A + v = O + (a_1 + x_1)v_1 + (a_2 + x_2)v_2 + (a_3 + x_3)v_3$ . Por tanto las coordenadas del punto  $A + v$  son:  $(a_1 + x_1), (a_2 + x_2), (a_3 + x_3)$ .
2. Si  $A = O + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$  y  $B = O + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$ , entonces  $B - A = (b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2 + (b_3 - a_3)v_3$  y las coordenadas del vector  $B - A$  son  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ .

#### **4.6. Ecuaciones paramétricas de rectas y planos.**

Veamos que forma toman las ecuaciones de rectas y planos en un referencial  $\{O, v_1, v_2, v_3\}$ . Sea la recta  $r : P = A + \lambda(B - A)$ . Supongamos  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ ; entonces por la última observación de la sección anterior resulta  $B - A = (b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2 + (b_3 - a_3)v_3$ , y por

el punto 1 de la Observación 4.1, si  $P$  tiene coordenadas  $(x, y, z)$  los puntos de la recta  $r$  tienen coordenadas:

$$(4.33) \quad x = a_1 + \lambda(b_1 - a_1), \quad y = a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \quad z = a_3 + \lambda(b_3 - a_3).$$

Si  $r$  es de la forma  $P = A + \lambda v$  con  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$  se obtiene:

$$(4.34) \quad x = a_1 + \lambda x_1, \quad y = a_2 + \lambda x_2, \quad z = a_3 + \lambda x_3.$$

Estas ecuaciones se suelen llamar **ecuaciones paramétricas de la recta**, y se suele pedir, por ejemplo “hallar las ecuaciones paramétricas de la recta” que pasa por los puntos  $P = (1, 0, 1)$  y  $Q = (-2, 1, 2)$ . En realidad debiera decirse, “hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta” porque dependiendo del punto que se tome como base, y del vector director elegido (uno o cualquier múltiplo -no nulo- de él) se obtendrán diferentes ecuaciones paramétricas. Sin embargo, dado que la recta es la misma, independientemente de la presentación analítica elegida, seguiremos refiriéndonos a *las* ecuaciones, en todos los casos. La respuesta al ejemplo que antecede es:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(-3, 1, 1).$$

Sean tres puntos no alineados  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $C = (c_1, c_2, c_3)$ . Consideramos el plano de ecuación  $P = A + \lambda(B - A) + \mu(C - A)$ . Llamando  $(x, y, z)$  a las coordenadas de  $P$ , por un razonamiento análogo al utilizado para obtener (4.33), se obtiene

$$(4.35) \quad \begin{aligned} x &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) + \mu(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) + \mu(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3) + \mu(c_3 - a_3). \end{aligned}$$

Si el plano es de la forma  $P = A + \lambda v + \mu w$  con  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ ,  $w = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$  se obtiene:

$$(4.36) \quad x = a_1 + \lambda x_1 + \mu y_1, \quad y = a_2 + \lambda x_2 + \mu y_2, \quad z = a_3 + \lambda x_3 + \mu y_3.$$

### 4.7. Ecuaciones implícitas de rectas y planos.

**Rectas.** Las ecuaciones (4.33), si  $a_1 \neq b_1$ ,  $a_2 \neq b_2$ ,  $a_3 \neq b_3$ , se pueden escribir de la siguiente manera:

$$(4.37) \quad \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}.$$

Análogamente, de (4.34) se deduce, si  $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ :

$$(4.38) \quad \frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - a_2}{x_2} = \frac{z - a_3}{x_3}.$$

En ambos casos, si alguno de los denominadores fuera cero, el correspondiente numerador también es cero. También por eliminación de  $\lambda, \mu$  en (4.35), se obtiene la forma general de la ecuación de un plano (usando determinantes de matrices dos por dos):

$$\begin{aligned} (x - a_1) \begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} - (y - a_2) \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} + \\ + (z - a_3) \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

La expresión que antecede al signo de igual puede tomarse como la definición del determinante de una matriz 3 por 3 -que será vista en detalle más adelante en el curso-, pudiéndose escribir más compactamente de la siguiente manera:

$$(4.39) \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Partiendo de (4.36) se obtiene otra forma de la ecuación implícita de un plano. Así, si el plano está dado por el punto  $A = (a_1, a_2, a_3)$  y los vectores  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$ ,  $w = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$ , la ecuación implícita toma la forma

$$(4.40) \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando estos determinantes tenemos, por ejemplo para (4.39)

$$a(x - a_1) + b(y - a_2) + c(z - a_3) = 0, \quad \text{o también } ax + by + cz + d = 0,$$

donde

$$a = k \begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}, \quad b = k \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_3 - a_3 \end{vmatrix},$$

$$c = k \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Recíprocamente toda ecuación de la última forma, en la que por lo menos uno de los coeficientes  $a, b, c$  es distinto de cero, representa un plano porque, suponiendo, por ejemplo  $c \neq 0$ , ella equivale a las tres ecuaciones

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = -\frac{d}{c} - \lambda\frac{a}{c} - \mu\frac{b}{c}$$

que son de la forma (4.36). Obsérvese que los coeficientes  $a, b, c$  sólo dependen de los vectores directores del plano. Dado que planos paralelos se pueden determinar con los mismos vectores directores, resulta que dos planos

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + cz + d' = 0$$

son paralelos si y sólo si  $a = pa'$ ;  $b = pb'$  y  $c = pc'$  para algún real  $p$ . Si además  $d = pd'$ , ambas ecuaciones representan el *mismo* plano. Observamos también que, por ejemplo de (4.38) se puede deducir

$$\frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - a_2}{x_2}, \quad \frac{x - a_1}{x_1} = \frac{z - a_3}{x_3}$$

que se reduce a

$$(4.41) \quad ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'y + d' = 0.$$

Estas dos ecuaciones indican la propiedad bien conocida de toda recta puede determinarse por dos planos que se cortan en ella.

**EJEMPLO 4.1.** En el ejemplo de la sección anterior, las ecuaciones implícitas de la recta por  $P$  y  $Q$  (recordar las disquisiciones sobre *las y unas* ecuaciones) son

$$\frac{x-1}{-3} = y = z-1, \text{ o bien } x+3y=1, \quad y-z=-1.$$

**EJEMPLO 4.2.** Las ecuaciones implícitas de la recta por  $(2, 1, 0)$ ,  $(3, 1, 5)$  son  $x-2 = z/5$ ;  $y = 1$ .

**EJEMPLO 4.3.** Las ecuaciones paramétricas del plano por  $(1, 1, 0)$  que tiene por vectores directores  $u = (-1, 0, 2)$  y  $v = (1, 3, 3)$  son

$$x = 1 - \lambda + \mu, \quad y = 1 + 3\mu, \quad z = 2\lambda + 3\mu.$$

Su ecuación implícita es  $-6x + 5y - 3z + 1 = 0$ .

**EJEMPLO 4.4.**  $x - 2y = 0$  es la ecuación de un plano paralelo al eje coordenado  $Oz$ , que corta al plano  $xOy$  según la recta  $z = 0$ ,  $x - 2y = 0$ .

**EJEMPLO 4.5.** Ecuación del plano paralelo al de ecuación  $x + y + z = 0$  por el punto  $(1, 1, 1)$ . Será de la forma  $x + y + z + d = 0$ , por el punto  $(1, 1, 1)$ ; por tanto  $1 + 1 + 1 + d = 0$  y resulta  $d = -3$ .

El lector atento ya habrá percibido que si  $(x, y, z)$  designa las coordenadas genéricas de cualquier punto del espacio, dado un cierto sistema de coordenadas, la ecuación implícita de un plano viene dado por *una* ecuación lineal en  $(x, y, z)$ ; en general la ecuación de cualquier superficie vendrá dada por una ecuación. Y una recta, vendrá dada por *dos* ecuaciones. Los puntos que verifican las dos ecuaciones serán los de la recta.

#### 4.8. Posiciones relativas de rectas y planos.

En esta sección se verá que el estudio de las posiciones relativas de rectas y planos llevan naturalmente a plantearse la resolución de sistemas de ecuaciones.

**Dadas dos rectas** en el espacio, podemos simplificar sus posiciones relativas en tres categorías. O bien se cruzan sin cortarse (esta es la posición genérica, la más común), o bien se cortan en un solo punto, o bien son



paralelas (este caso incluye el de las rectas coincidentes). El caso de que sean paralelas ya fue analizado: son rectas con vectores directores colineales (uno múltiplo del otro) y coinciden o no según tengan algún punto común o no. Si los vectores directores no son colineales se trata de encontrar puntos comunes a las dos rectas. Para ello se estudia el sistema de ecuaciones formado al igualar las ecuaciones de sus coordenadas. Si las rectas se dan en forma paramétrica se tendrá un sistema con tres ecuaciones y dos incógnitas (los parámetros de cada una de las rectas). Este sistema, si los vectores directores no son colineales, puede ser compatible determinado (una solución formada por una pareja de números correspondientes a cada parámetro) o incompatible (sin solución). El primer caso corresponde al caso de corte (y la solución en cada parámetro dará el mismo punto en el espacio, pero al moverse por cada una de las rectas); el segundo caso corresponde a las rectas que se cruzan.

**EJEMPLO 4.6.** Determinar las posiciones relativas de las rectas:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) \\ (x, y, z) &= (0, 1, 2) + \mu(2, 0, 1).\end{aligned}$$

Al igualar las coordenadas resulta

$$1 - \lambda = 2\mu; \quad \lambda = 1; \quad 0 = 2 + \mu$$

que no posee ninguna solución: las rectas se cruzan.

**EJEMPLO 4.7.** Determinar las posiciones relativas de las rectas:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) \\ (x, y, z) &= (0, 1, 2) + \mu(-4, 4, 0).\end{aligned}$$

Los vectores directores son colineales y al igualar las coordenadas se obtiene

$$(1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) = (0, 1, 2) + \mu(-4, 4, 0)$$

que no tiene solución pues en la tercera coordenada resulta la igualdad de los números distintos 1 y 2: las rectas son paralelas.

**Dados dos planos** en el espacio podemos simplificar sus posiciones relativas en dos categorías. O bien se cortan en una recta, o bien son paralelos (este caso incluye el de los planos coincidentes). La posición relativa se manifestará analíticamente en que el sistema dado por las dos ecuaciones implícitas sea o bien compatible indeterminado con las soluciones dependientes de un parámetro (un grado de libertad) en el caso de corte en una recta, o bien incompatible (no tiene soluciones) en el caso de planos paralelos no coincidentes, o bien indeterminado con las soluciones dependientes de dos parámetros (dos grados de libertad) en el caso de coincidencia. Si los planos estuvieran dados en forma paramétrica tendríamos, al igualar las coordenadas de los dos planos, un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (dos por cada plano).

**EJEMPLO 4.8.** Posición relativa de los planos

$$2x + 3y - z = 1, \quad -x - 2y + z = 0.$$

Para resolver el sistema dado por las dos ecuaciones, se escaleriza, obteniéndose el sistema  $2x + 3y - z = 1$ ,  $-y + z = 1$ . Este sistema tiene infinitas soluciones que dependen de un solo parámetro (un grado de libertad) y por lo tanto los planos se cortan en una recta. Para determinar las ecuaciones paramétricas de esa recta, se puede tomar  $y = \lambda$ , resultando  $z = 1 + \lambda$ ,  $x = 1 - \lambda$ .

**EJEMPLO 4.9.** Posiciones relativas de los planos de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, -1) \\(x, y, z) &= (0, 0, 3) + t(1, 2, -1) + s(2, 1, 1).\end{aligned}$$

Igualando las correspondientes coordenadas resulta

$$\begin{aligned}1 + \lambda &= t + 2s & \lambda + 0\mu - t - 2s &= -1 \\ \lambda + \mu &= 2t + s & \implies \lambda + \mu - 2t - s &= 0 \\ 1 - \mu &= 3 - t + s & 0\lambda - \mu + t - s &= 2.\end{aligned}$$

Si ahora omitimos de escribir las variables, pero mantenemos su orden  $\lambda, \mu, t, s$ , y agregamos una columna con los términos independientes, tendremos las siguientes matrices de coeficientes (primero la original, y luego la escalerizada)

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \implies \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

El sistema es por tanto incompatible dado que sumando cero de cada una de las variables deberíamos obtener 3. Los planos no se cortan, ellos son paralelos. Observar que de acuerdo con lo observado en la Sección 4.3 los vectores directores del segundo plano son combinación lineal de los vectores directores del primer plano:

$$\begin{aligned} (1, 2, -1) &= (1, 1, 0) + (0, 1, -1), \\ (2, 1, 1) &= 2(1, 1, 0) - (0, 1, -1). \end{aligned}$$