# CAPÍTULO 5

# GEOMETRÍA EN $\mathbb{R}^3$.

En el estudio de objetos físicos, nos enfrentamos al desafío de describir no solo sus propiedades inherentes, como la masa o la densidad, sino también comprender su estado en un momento dado, que puede estar marcado por variables como la velocidad o el peso. En este contexto, usamos las magnitudes para representar estas características, y algunas de ellas, como la masa o la temperatura, son conocidas como magnitudes escalares, ya que se expresan mediante un solo número real junto con su unidad de medida.

Sin embargo, al adentrarnos en fenómenos más complejos, como el desplazamiento de un objeto en el espacio, nos encontramos con la necesidad de utilizar magnitudes que no solo indiquen valores numéricos, sino que también incluyan información sobre la dirección y el sentido. Aquí es donde entran en juego los vectores, que se presentan como segmentos orientados que llevan consigo información sobre dirección y longitud.

En este marco, las magnitudes como la fuerza o la velocidad se denominan magnitudes vectoriales. Para comprender y operar con estos vectores, comenzamos por establecer un sistema cartesiano de coordenadas, que actúa como referencia para ubicar la posición de un objeto y observar su cambio relativo, es decir, su desplazamiento.

## 5.1. El espacio $\mathbb{R}^n$.

En lo que sigue, $n$ denotará siempre un número natural mayor o igual a 1. Consideremos el conjunto de todas las $n$-uplas ordenadas de números reales, que denotaremos por $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n\}$$

A cada uno de los números reales $x_i$ que conforman la $n$-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lo llamamos componente o coordenada $i$-ésima. Por ejemplo, si $n = 1$, el conjunto $\mathbb{R}^1$ no es más que el conjunto de números reales. Si $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ será el conjunto de parejas ordenadas de números reales y usualmente lo representamos como $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Para $n = 3$, el conjunto $\mathbb{R}^3$ está formado por las tripletas ordenadas de números reales y lo expresamos usualmente como $\{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Insistimos en que las $n$-uplas que constituyen el conjunto $\mathbb{R}^n$ son ordenadas. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la pareja $(1, 5)$ es diferente de la pareja $(5, 1)$. De hecho, dos $n$-uplas en $\mathbb{R}^n$ se consideran iguales cuando cada una de sus coordenadas son iguales. Es decir, para $n$-uplas $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Un hecho de fundamental importancia y que será relevante en la segunda parte de estas notas es que en el conjunto $\mathbb{R}^n$ podemos definir dos operaciones entre sus elementos, las cuales cumplen con ciertas propiedades que veremos a continuación.

- *Suma de n-uplas ordenadas:* Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ son dos elementos de $\mathbb{R}^n$, definimos su suma, y la denotamos por $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n)$, como

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

- *Producto de un escalar real por una n-upla ordenada:* Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$ y $c$ es un número real, el producto de la $n$-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por el escalar $c$, denotado por $c \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se define como

$$c \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

Obsérvese que, según estas definiciones, tanto la suma de $n$-uplas como el producto de una de ellas por un escalar son nuevamente $n$-uplas del conjunto $\mathbb{R}^n$. Por ello, se dice que estas operaciones son cerradas en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, la suma de la tripleta $(1, 5, 9)$ con la tripleta $(0, 0, 7)$ es

$$(1, 5, 9) + (0, 0, 7) = (1 + 0, 5 + 0, 9 + 7) = (1, 5, 16)$$

que es una nueva tripleta de $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^5$, el producto de la 5-upla $(1, 1, 0, 1, 0)$ por el escalar 2 es

$$2 \cdot (1, 1, 0, 1, 0) = (2, 2, 0, 2, 0)$$

que también es un elemento de $\mathbb{R}^5$. Es rutina verificar que estas operaciones entre los elementos de $\mathbb{R}^n$ cumplen con las propiedades siguientes:

1. *Propiedad 1.* La suma es conmutativa, es decir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2. *Propiedad 2.* La suma es asociativa, es decir

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + [(y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)] = [(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)] + (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

3. *Propiedad 3.* Existe un elemento en $\mathbb{R}^n$, llamado cero, que actúa de manera neutra para la suma. De hecho, este elemento es el que tiene todas sus coordenadas iguales al (número real) cero. Lo denotaremos por $\mathbf{0}$ . Es decir $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y se tiene

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

4. *Propiedad 4.* Cada $u$-upla de $\mathbb{R}^n$ tiene un inverso aditivo, el cual es un elemento de $\mathbb{R}^n$ que tiene la propiedad de que, sumado con la $n$-upla original, produce el cero. De hecho, el inverso aditivo de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, puesto que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

5. *Propiedad 5.* Si $c$ es un escalar, se tiene

$$c\,[(y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)] = (cy_1, cy_2, \ldots, cy_n) + (cz_1, cz_2, \ldots, cz_n).$$

6. *Propiedad 6.* Si $c$ y $d$ son escalares, se tiene

$$(cd)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c\,[d(((x_1, x_2, \ldots, x_n))] = d\,[c(((x_1, x_2, \ldots, x_n))]\,.$$

7. *Propiedad 7.* Si $c$ y $d$ son escalares, se tiene

$$(c + d)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c(x_1, x_2, \ldots, x_n) + d(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

8. *Propiedad 8.*

$$1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

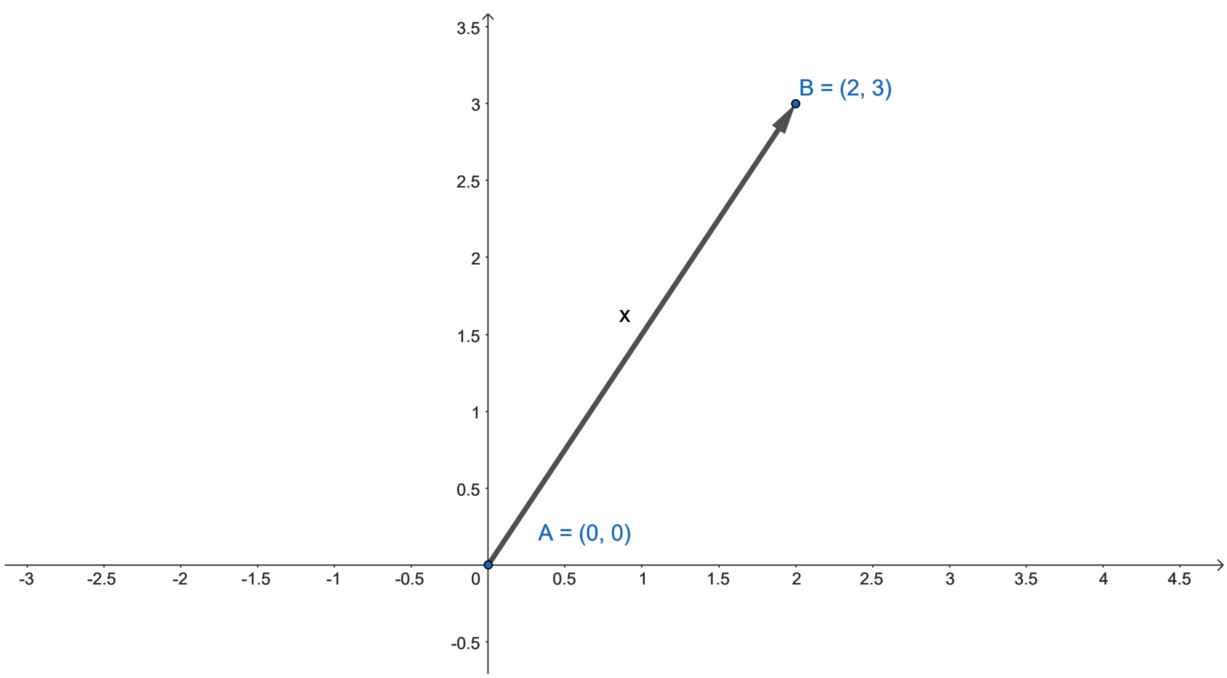
**Interpretación geométrica.**

1. *El caso $n = 2$.*

   - *Representación en el plano de 2-uplas ordenadas:* Un **vector anclado en el origen** se visualiza geométricamente como un segmento de línea dirigido, con su punto de inicio en $(0, 0)$ y su punto final en $(x_1, x_2)$, como se ilustra en la siguiente figura. Este vector se expresa como un vector columna utilizando el mismo par ordenado que representa su punto terminal. En otras palabras,

   $$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

   Por ejemplo, el vector $\overrightarrow{x}$ se representa como un segmento de línea dirigido desde el punto $A = (0, 0)$ hasta $B = (2, 3)$.



Geométricamente, $\mathbb{R}^2$ se describe como el conjunto de todas las 2-uplas ordenadas de la forma $(x, y)$, y observamos que hay una correspondencia directa entre cada 2-upla $(x, y)$ y el vector anclado en el origen con su punto terminal en $(x, y)$.

En general, cada vector columna se relaciona con una dirección y una longitud, siendo irrelevante el punto de anclaje. Así, para un vector columna $\overrightarrow{x}$ (no nulo) y un punto $P$, siempre existe un único punto $Q$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

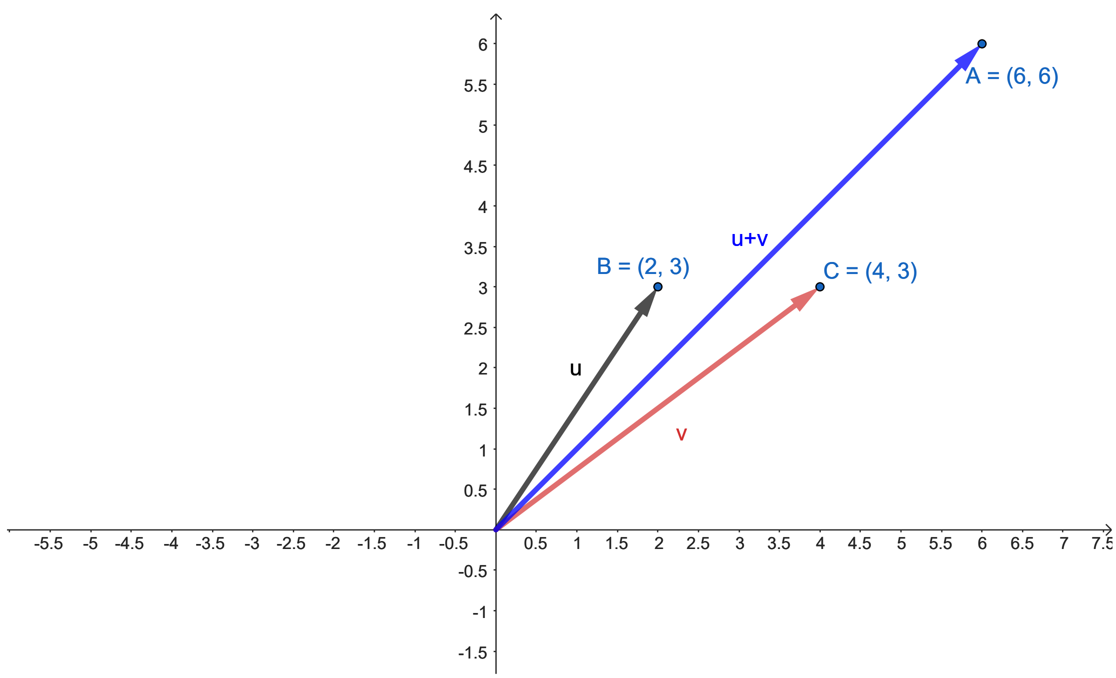
En resumen:

*a*) Dados los puntos $P$ y $Q$, hay un único vector columna $\overrightarrow{PQ}$ que representa la posición de $Q$ respecto a $P$.

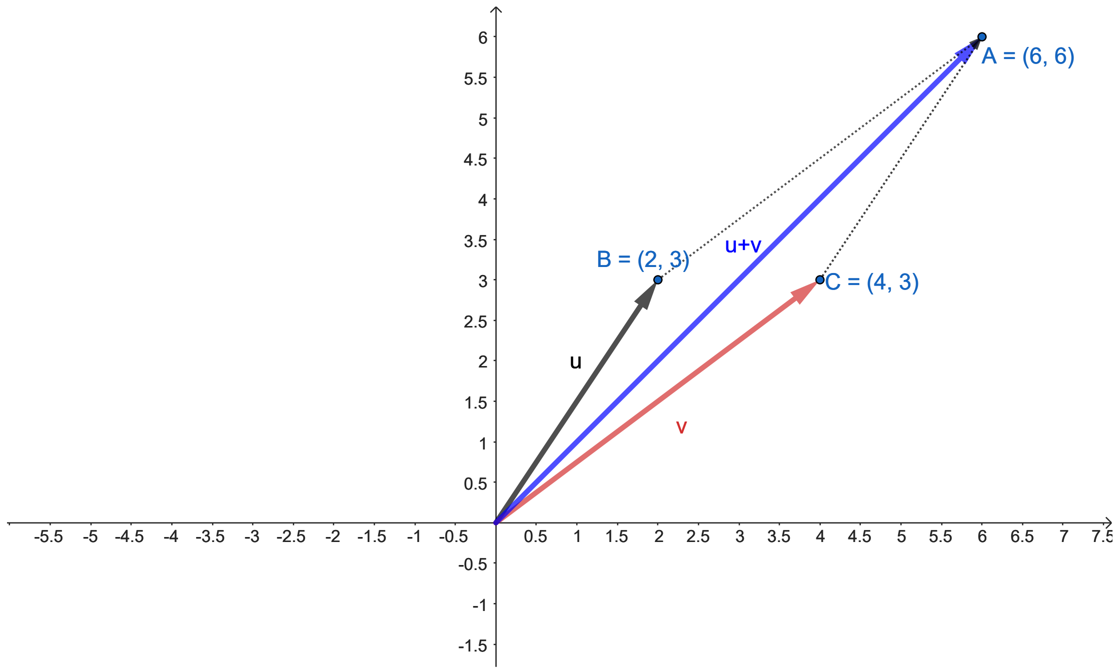
*b*) Dado cualquier vector columna no nulo $\overrightarrow{x}$, existen infinitos pares de puntos $P$ y $Q$ tales que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

*c*) Dado cualquier punto $P$ y cualquier vector columna no nulo $\overrightarrow{x}$, hay un único punto $Q$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{x}$.

- *Suma de vectores en el plano:* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(4,3)}$, la suma de estos vectores es $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(2+4, 3+3)} = \overrightarrow{(0,0)(6,6)}$.




Si trasladamos el vector anclado $\overrightarrow{u}$ hasta el punto $(4, 3)$ y el vector anclado $\overrightarrow{v}$ hasta el punto $(2, 3)$, la figura adquiere la apariencia de un paralelogramo.



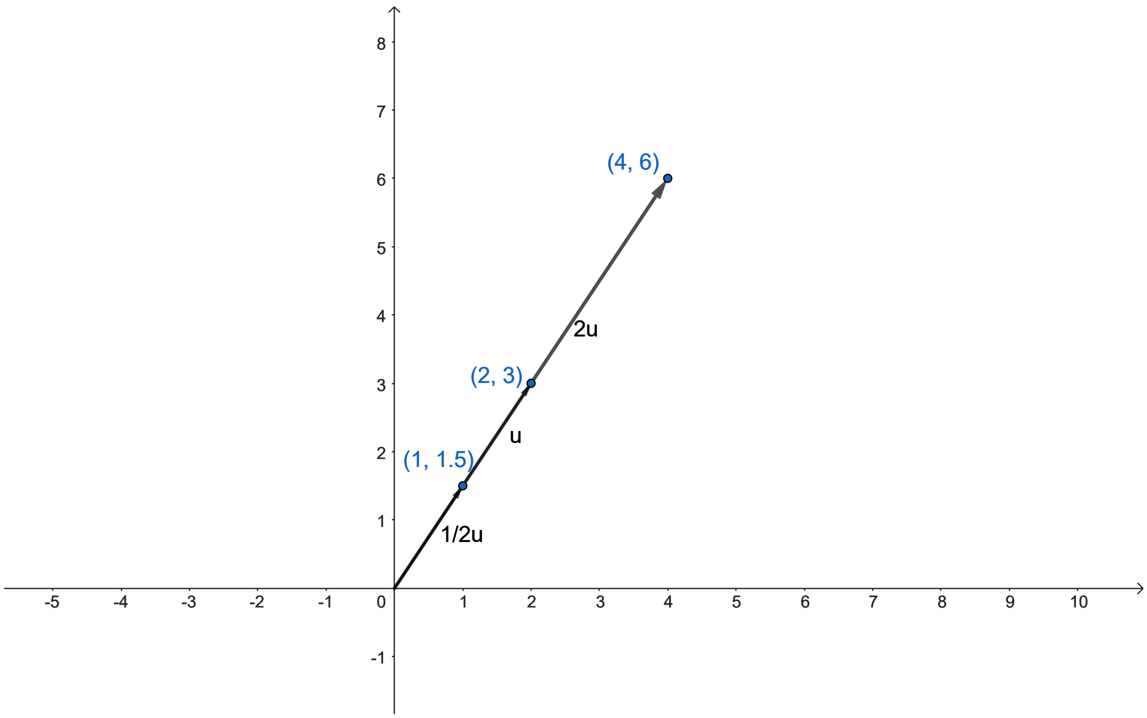

Para obtener geométricamente $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, nos enfocamos en la diagonal anclada en $(0,0)$ del paralelogramo formado.

- *Multiplicación de un escalar por un vector:* Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$c\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2c,3c)}.$$

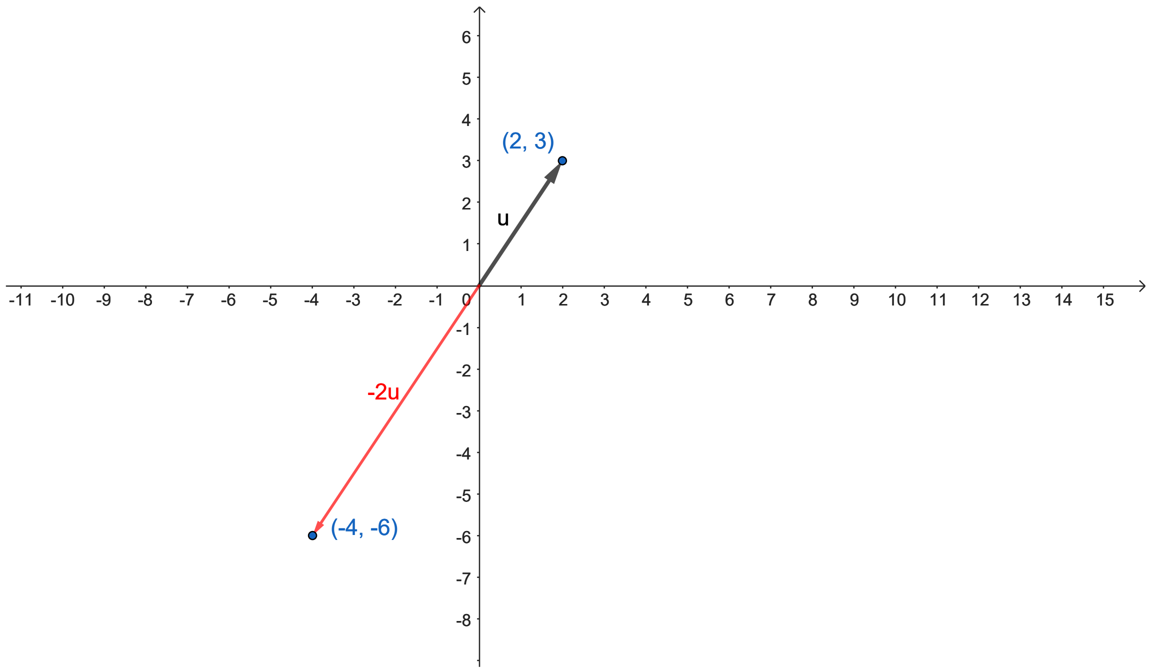
Analizamos el efecto de la multiplicación del escalar $c$ sobre el vector $\overrightarrow{u}$, dividiéndolo en casos según el valor de $c$.

Si $c > 0$, distinguimos dos subcasos: la multiplicación por $c$ resulta en un alargamiento de $\overrightarrow{u}$ en $c$ veces cuando $c > 1$. Por ejemplo, la multiplicación de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ por 2 da como resultado el vector $\overrightarrow{(0,0)(4,6)}$. De manera análoga, para $0 < c < 1$, obtenemos un acortamiento de $\overrightarrow{u}$. Por ejemplo, para $c = \frac{1}{2}$, obtenemos el vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{(0,0)(2,3)} = \overrightarrow{(0,0)(1,\frac{3}{2})}$.



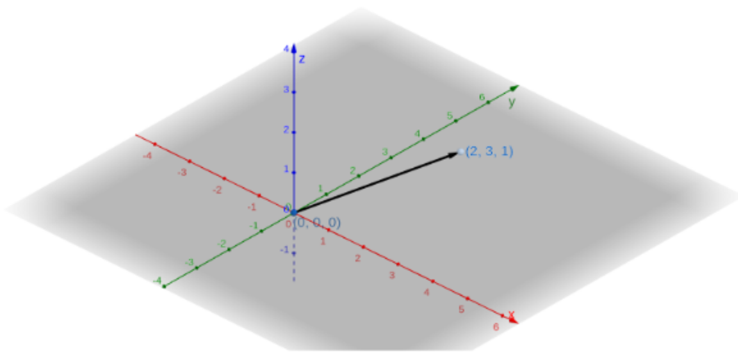

En general, si $c$ es un número real con $c > 0$, $c\overrightarrow{u}$ se interpreta como un vector en la misma dirección que $\overrightarrow{u}$. De hecho, diremos que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección si existe un número real $c > 0$ tal que $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{v}$.

La multiplicación por un número real negativo invierte la dirección. Por ejemplo, $-2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(-4,-6)}$, como se representa en la siguiente figura.




Decimos que dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen direcciones opuestas si existe un $c < 0$ tal que $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{v}$.

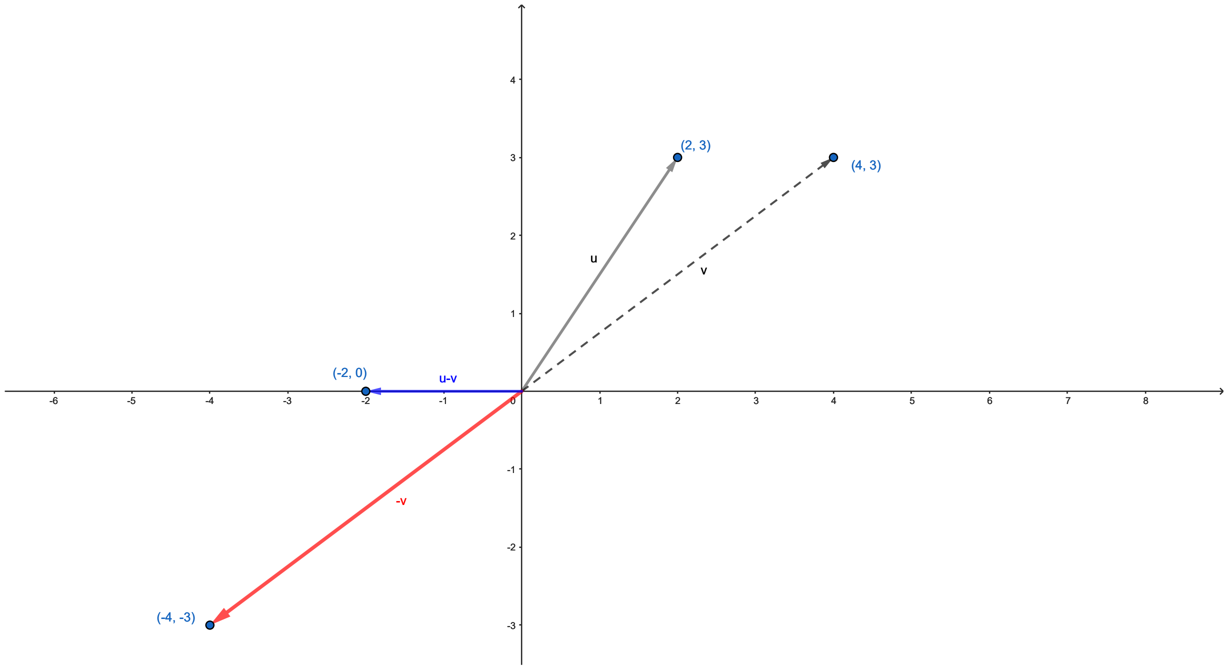
2. *El caso* $n = 3$. Podemos realizar consideraciones análogas e interpretar geométricamente que $\mathbb{R}^3$ se describe como el conjunto de todas las 3-uplas ordenadas de la forma $(x, y, z)$. Observamos una correspondencia directa entre cada 3-upla $(x, y, z)$ y el vector anclado en el origen con su punto terminal en $(x, y, z)$. Por ejemplo, identificamos la 3-upla $(2, 3, 1)$ con el vector anclado en el origen y punto terminal en $(2, 3, 1)$, es decir, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0, 0, 0)(2, 3, 1)}$, como muestra la siguiente figura.




La interpretación geométrica de los vectores, comúnmente asociada a los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se aplica convencionalmente al caso general de vectores en $\mathbb{R}^n$. Aunque esta visualización tiene sentido al considerar vectores que podemos percibir en dimensiones espaciales más bajas, como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se extiende esta práctica incluso al contexto abstracto de $\mathbb{R}^n$.

Este enfoque surge al contemplar que, de no estar limitados por las restricciones espaciales inherentes a nuestra percepción como seres humanos (habiendo evolucionado en un entorno tridimensional, $\mathbb{R}^3$, y siendo incapaces de visualizar o imaginar espacios $\mathbb{R}^n$ con $n > 3$), los vectores en $\mathbb{R}^n$ mostrarían las "mismas propiedades geométricas"que los vectores en dimensiones más bajas, como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

**Observación 5.1** *La resta de vectores en $\mathbb{R}^n$, denotada como $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, se define como la suma de $\overrightarrow{u}$ con el opuesto de $\overrightarrow{v}$, es decir, $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{-v}$. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(0,0)(2,3)}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(4,3)}$, la resta de estos vectores es $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{(0,0)(2-4,3-3)} = \overrightarrow{(0,0)(-2,0)}$.*




## 5.2. Rectas en $\mathbb{R}^3$.

En esta sección, caracterizaremos los puntos que pertenecen al lugar geométrico de una **recta** en $\mathbb{R}^3$. Para ello, consideremos que todos los vectores cuyo extremo y orígen se encuentran sobre la recta son simplemente múltiplos de un vector específico, al cual llamaremos el **vector director** de la recta, suponiendo siempre que este vector no sea nulo.

Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo de la recta $L$, y $P = (x, y, z)$ cualquier otro punto en ella. Podemos expresar el vector $\overrightarrow{P_0P}$ como $t\overrightarrow{u}$, donde $\overrightarrow{u}$ es el vector director de $L$ con coordenadas $(a, b, c)$, y $t$ es un número real. Así, de la igualdad

$$\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{u},$$

obtenemos la **ecuación vectorial de la recta** $L$:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a, b, c).$$

A partir de esta igualdad, obtenemos la **ecuación paramétrica de la recta** $L$:

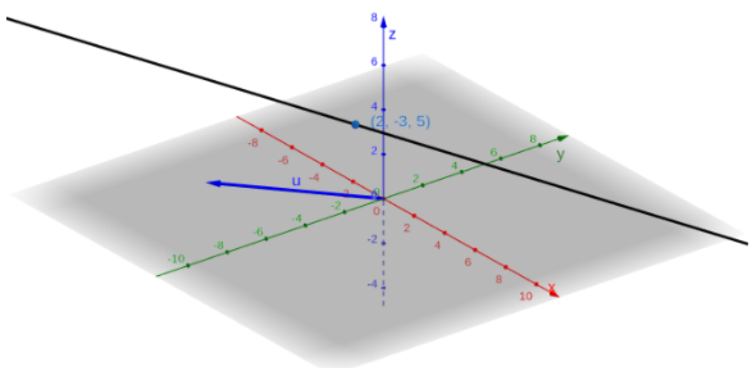
$$L = \begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es el **parámetro**, permitiendo expresar cada componente del punto $(x, y, z) \in L$ como una función de $t$:

$$L = \begin{cases} x(t) = x_0 + ta \\ y(t) = y_0 + tb \\ z(t) = z_0 + tc \end{cases} \quad .$$

**Ejemplo 5.1** *Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta $L$ que pasa por el punto $(2,-3,5)$ y tiene a $\overrightarrow{u}=(-4,-6,1)$ como vector director. Según la ecuación anterior, ecuación de la recta viene dada por*

$$L=\begin{cases} x(t)=2-4t \\ y(t)=-3-6t \\ z(t)=5+t \end{cases}$$




Nótese que, al despejar e igualar el parámetro $t$ de cada una de las ecuaciones paramétricas de la recta $L$, ésta también puede describirse a través de una **ecuación simétrica**:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Esta ecuación solo puede obtenerse si las componentes del vector director son no nulas, es decir, si $a, b, c \neq 0$. Retomando el ejemplo anterior, la ecuación simétrica de la recta que pasa por el punto $(2, -3, 5)$ y tiene como vector director a $\overrightarrow{u} = (-4, -6, 1)$ está dada por:

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-5}{1}.$$

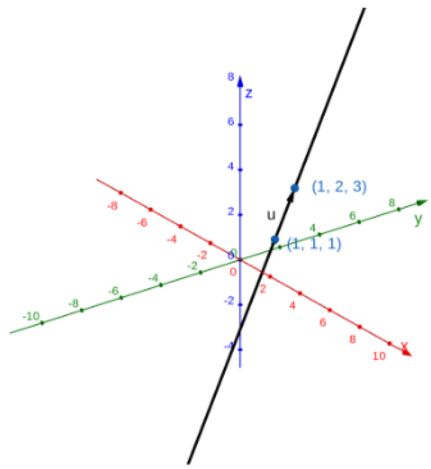
**Observación 5.2** *Al igual que en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$, dos puntos determinan una única recta. En efecto, la recta determinada por los puntos $P_0 = (x_0, x_1, x_2)$ y $P_1 = (y_0, y_1, y_2)$ viene definida por cualquiera de los puntos $P_0$ o $P_1$ y un vector director. Este vector director puede obtenerse considerando el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ o $\overrightarrow{P_1P_0}$.*

**Ejemplo 5.2** *La ecuación paramétrica de la recta $L$ que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ viene dada por*

$$L = \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 + t \\ z(t) = 1 + 2t \end{cases}$$

*donde hemos utilizado el punto $P_0 = (1, 1, 1)$ y el vector director $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{(1, 1, 1)(1, 2, 3)} = (0, 1, 2)$ para su construcción. Aunque la primera componente del vector director $\overrightarrow{u}$ es nula, podemos obtener una ecuación simétrica para la recta $L$ de la siguiente manera*

$$\frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}, \ x = 1.$$




**Ejemplo 5.3** *1. Consideremos las dos rectas*

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = 1 + 4t \\ y(t) = -2 - 6t \\ z(t) = 5 + 8t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = 7 + 3s \\ y(t) = 2 + 2s \\ z(t) = 1 - 2s \end{cases}$$

*donde los parámetros de las rectas han sido convenientemente escogidos con letras distintas, $t, s \in \mathbb{R}$. Estamos interesados en calcular $L_1 \cap L_2$. Si existe algún punto $(x, y, z) \in L_1 \cap L_2$, tendría que existir un* *valor de $t$ y otro de $s$ que hagan posible que se obtengan las igualdades correspondientes, es decir,*

$$\begin{cases} 1+4t = 7+3s \\ -2-6t = 2+2s \\ 5+8t = 1-2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-3s = 6 \\ -6t-2s = 4 \\ 8t+2s = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-3s = 6 \\ \dfrac{-13}{2}s = 13. \end{cases}$$

*En este caso, este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas ($s$ y $t$) tiene solución para $t = 0$ y $s = -2$. Al sustituir estos valores de los parámetros en las ecuaciones de las rectas, encontramos que el punto común de ambas es $(1, -2, 5)$.*

2. ***Ejercicio 8. Examen GAL1. Febrero 2016.***

*Dado $a, b \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $S$ con 3 ecuaciones y 3 incógnitas dado por la matriz ampliada*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$$

*El conjunto solución del sistema $S$ es una recta si y solo si:*

(A) $a^2 \neq 1$ *(cualquier valor de $b$).*

(B) $a = 1$ *o* $a = -1$ *(cualquier valor de $b$).*

(C) $a = 1$ *y* $b = 0$.

(D) $a = -1$ *(cualquier valor de $b$).*

(E) $a = -1$ *y* $b = 1$.

***Solución:*** *Opción E. En efecto, escalerizando, obtenemos que:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & -a-1 & a+1 & b+1 \end{array}\right)$$

*Se distinguen tres casos:*

a) *Si $a^2 \neq 1$ (es decir, $a \neq 1$ y $a \neq -1$), el sistema es compatible determinado y tiene una solución única.*

b) *Si $a = 1$, el sistema tiene la matriz ampliada*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$

*Se distinguen dos subcasos:*

1) *Si $b \neq -1$, el sistema es incompatible.*

2) *Si $b = -1$, el sistema es compatible indeterminado, y su conjunto solución es el plano $\pi : x + y - z = 1$.*

c) *Si $a = -1$, el sistema tiene la matriz ampliada*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

*De nuevo, se distinguen dos subcasos:*

1) *Si $b \neq 1$, el sistema es incompatible.*
2) *Si $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado, y su conjunto solución es la recta $r : x - y = 0, z = -1$.*

*Luego, el conjunto solución del sistema original consiste en una recta solo en el último caso, donde $a = -1$ y $b = 1$.*

**Definición 5.1** *Dos rectas son* ***paralelas*** *si sus vectores directores tienen la misma dirección.*

Si $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ son los vectores directores de las rectas $L_1$ y $L_2$ respectivamente, entonces $L_1$ es paralela a $L_2$, denotado por $L_1 \parallel L_2$, si $\overrightarrow{u_1} \parallel \overrightarrow{u_2}$, es decir, si existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u_1} = c\overrightarrow{u_2}$. En este caso, podemos distinguir dos subcasos:

$$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas no coincidentes.} \\ L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas coincidentes.} \end{cases}$$

Si dos rectas en $\mathbb{R}^3$ no son paralelas, diremos entonces que se **cruzan**. En este caso, también podemos tener dos subcasos dependiendo de cómo sea su intersección:

$$L_1 \nparallel L_2 \Rightarrow \begin{cases} L_1 \cap L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan y no se cortan.} \\ L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan y se cortan.} \end{cases}$$

## 5.3. Intersección de rectas y sistemas de ecuaciones.

Consideremos dos rectas $L_1$ y $L_2$ no paralelas dadas por las ecuaciones paramétricas

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = x_1 + a_1 t \\ y(t) = y_1 + b_1 t \\ z(t) = z_1 + c_1 t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = x_2 + a_2 s \\ y(t) = y_2 + b_2 s \\ z(t) = z_2 + c_2 s \end{cases}$$

Estas rectas se cruzan en el espacio al no ser paralelas. Al plantear el sistema

$$\begin{cases} x_1 + a_1 t = x_2 + a_2 s \\ y_1 + b_1 t = y_2 + b_2 s \\ z_1 + c_1 t = z_2 + c_2 s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 t - a_2 s = x_2 - x_1 - 1 \\ b_1 t - b_2 s = y_2 - y_1 - 1 \\ c_1 t - c_2 s = z_2 - z_1 - 1 \end{cases}$$

notamos que este sistema tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Se presentan los siguientes casos:

- El sistema es incompatible, en cuyo caso, $L_1$ y $L_2$ se cruzan pero no se cortan.
- El sistema es compatible determinado, en cuyo caso, $L_1$ y $L_2$ se cruzan y además su intersección no es vacía y consta de un único punto.

**Ejemplo 5.4** *Consideremos dos rectas $L_1$ y $L_2$ dadas por las ecuaciones paramétricas*

$$L_1 = \begin{cases} x(t) = -7 + 3t \\ y(t) = -4 + 4t \\ z(t) = -3 + -2t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x(t) = 21 + 6s \\ y(t) = -5 + -4s \\ z(t) = 2 + -s \end{cases}$$

*Notamos que $L_1 \nparallel L_2$, lo que significa que las rectas se cruzan en $\mathbb{R}^3$. Al considerar el sistema*

$$\begin{cases} 3t - 6s = 7 + 21 \\ 4t + 4s = 4 - 5 \\ -2t + s = 3 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = 28 \\ 4t + 4s = -1 \\ -2t + s = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = 28 \\ 12s = \dfrac{-115}{3} \\ 0 = \dfrac{169}{12} \end{cases}$$

*Como el sistema planteado no tiene solución, las rectas no se cortan. Por lo tanto, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.*

## 5.4. Planos en $\mathbb{R}^3$.

Vimos que dos puntos cualesquiera en $\mathbb{R}^3$ determinan una única recta. Ahora, si consideramos tres puntos no colineales[1] $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ estamos interesados en describir el lugar geométrico al que llamaremos **plano**, formado por todas las sumas de múltiplos de los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ (anclados en el punto $(x_0, y_0, z_0)$). Dicho lugar geométrico se describe mediante la **ecuación vectorial**

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2},$$

donde $\lambda$ y $\mu$ son parámetros reales.

Podemos observar que la condición de no colinealidad entre los puntos $P_0, P_1$ y $P_2$ implica que los vectores $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$ no son paralelos. Por lo tanto, necesitamos de dos parámetros, en este caso $\lambda$ y $\mu$, para describir un plano en $\mathbb{R}^3$. Resulta entonces que la ecuación paramétrica del plano viene dada por

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

Si expresamos explícitamente la dependencia de cada coordenada del plano respecto a los parámetros $\lambda$ y $\mu$, obtenemos:

$$\begin{cases} x(\lambda, \mu) = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y(\lambda, \mu) = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z(\lambda, \mu) = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

En resumen, tres puntos no colineales $P_0, P_1$ y $P_2$ determinan un único plano que los contiene. También podemos pensar que cada plano queda determinado por un punto fijo, en este caso, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y dos vectores no nulos y no paralelos $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, b_3)$. En este caso, la ecuación vectorial del plano también se puede expresar como

$$\overrightarrow{(x_0, y_0, z_0)(x, y, z)} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},$$

[1] Un conjunto de puntos situados sobre una misma recta se dice que es colineal.

donde $\lambda$ y $\mu$ son parámetros reales. La correspondiente ecuación paramétrica es entonces

$$\begin{cases} x(\lambda,\mu) = x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y(\lambda,\mu) = y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z(\lambda,\mu) = z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3. \end{cases}$$

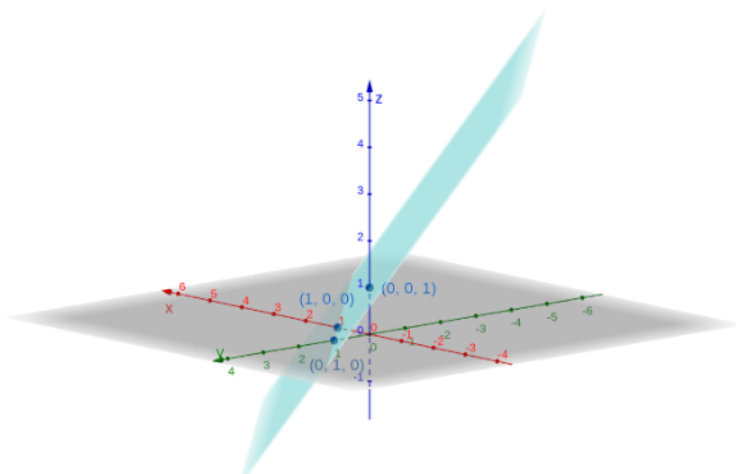
**Ejemplo 5.5** *Obtengamos la ecuación parámetrica del plano $\pi$ que contiene los puntos $P_0 = (1,0,0), P_1(0,1,0)$ y $P_2 = (0,0,1)$. Utilizando la fórmula recién presentada, la ecuación buscada es:*

$$\overrightarrow{(x_0,y_0,z_0)(x,y,z)} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\overrightarrow{P_0P_2},$$

$$\pi = \begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

$$\pi = \begin{cases} x - 1 = \lambda(0-1) + \mu(0-1) \\ y - 0 = \lambda(1-0) + \mu(0-0) \\ z - 0 = \lambda(0-0) + \mu(1-0) \end{cases}$$

$$\pi = \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu. \end{cases}$$




### 5.4.1. Ecuación reducida de un plano en $\mathbb{R}^3$

Consideremos un plano $\pi$ determinado por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y los vectores dirección $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, b_3)$. Entonces, el punto $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in \pi$ si existen reales $\lambda$ y $\mu$ tales que se verifica la siguiente relación:

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y - y_0 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z - z_0 = \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

Luego, el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda F_2 + \mu F_3 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

debe ser igual a cero debido a que la primera fila $F_1$ se puede expresar como $\lambda F_2 + \mu F_3$. Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Al calcular este determinante usando la expansión por cofactores en la primera fila, se obtiene:

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto,

$$(x - x_0)(a_2b_3 - a_3b_2) - (y - y_0)(a_1b_3 - a_3b_1) + (z - z_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

Denotando $A = a_2b_3 - a_3b_2$, $B = a_1b_3 - a_3b_1$, y $C = a_1b_2 - a_2b_1$, tenemos la **ecuación reducida del plano** $\pi$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

En general, la ecuación reducida de un plano tiene la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde los coeficientes $A$, $B$ y $C$ no pueden ser simultáneamente nulos.

**Ejemplo 5.6** *Determinemos la ecuación reducida del plano $\pi$ que contiene los puntos $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$ y $P_2 = (0, 0, 1)$. Tomamos las direcciones $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (-1, 0, 1)$ y planteamos el determinante según lo discutido anteriormente:*

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

*Resolviendo este determinante obtenemos la ecuación reducida del plano:*

$$x + y + z = 1$$

La ecuación reducida del plano proporciona información geométrica interesante, ya que permite calcular los puntos de corte (si existen) del plano con cada uno de los ejes coordenados. Por ejemplo, si queremos conocer el punto de corte entre el plano $x + y + z = 1$, es suficiente con sustituir $y = z = 0$ en la ecuación anterior para obtener que $x = 1$. Esto indica que el punto de intersección entre el eje de las $X$ y el plano $x + y + z = 1$ es $(1, 0, 0)$.

En general, si $A \neq 0$, el plano cortará el eje $X$ en el punto $\left(\frac{-D}{A}, 0, 0\right)$; si $B \neq 0$, entonces el plano cortará el eje $Y$ en el punto $\left(0, \frac{-D}{B}, 0\right)$; y finalmente, si $C \neq 0$, el plano cortará el eje $Z$ en el punto $\left(0, 0, \frac{-D}{C}\right)$.

**Ejemplo 5.7** *1.* ***Ejercicio 7. Primer parcial GAL1 interactiva. Septiembre 2023.***

a*) Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para la recta $r$ que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralela al vector $(1, 1, 1)$.*

b*) Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para el plano que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.*

***Solución:***

a) *Una ecuación paramétrica se obtiene expresando en coordenadas una ecuación vectorial:*

$$\vec{X} := (1,0,1) + \lambda(1,1,1) \quad (S_\lambda) = \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

*Despejando $\lambda$ y sustituyendo, el sistema $(S_\lambda)$ equivale al $(S'_\lambda)$:*

$$\begin{cases} x = 1+y \\ y = \lambda \\ z = 1+y \end{cases}$$

*La primera y la tercera ecuación de $(S'_\lambda)$ constituyen una ecuación reducida para la recta $r$, que la expresan como intersección de dos planos:*

$$(S) \quad \begin{cases} x-y-1=0 \\ z-y-1=0 \end{cases}$$

b) *Igual que en el caso anterior, empezamos por hallar una ecuación vectorial para el plano. Llamemos a los puntos dados $A=(1,0,0)$, $B=(0,2,0)$ y $C=(0,0,3)$, de donde tenemos los vectores directores $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,0,3)$. Una ecuación vectorial es $(S_{\lambda\mu})$ y luego, despejando $\lambda$ y $\mu$ y sustituyendo hallamos una reducida:*

$$\overrightarrow{X} = (1,0,0) + \lambda(-1,2,0) + \mu(-1,0,3) \quad (S_{\lambda,\mu}) = \begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 3\mu \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3} \\ y = 2\lambda \\ z = 3\mu \end{cases}$$

*La primera ecuación de este sistema constituye una ecuación reducida para el plano:* $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.

2. ***Ejercicio 3. Examen GAL1 interactiva. Febrero 2024.***

a) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para la recta $r$ que pasa por el punto (3, 0, 2) y es paralela al vector $(-1,1,2)$.*

b) *Hallar una ecuación paramétrica y una reducida para el plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,0,0), (2,1,0)$ y $(3,0,1)$.*

***Solución:***

a) *Una ecuación vectorial de la recta es $(x,y,z) = (3,0,2) + \lambda(-1,1,2)$. De esta se deduce una paramétrica, simplemente escribiendo esta identidad vectorial en coordenadas:*

$$\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+2\lambda \end{cases}$$

*Una forma de obtener una ecuación reducida consiste en despejar el parámetro de una de las identidades y sustituirlo en las restantes dos. En este caso,*

$$\lambda = y$$

*y sustituyendo obtenemos:*

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}$$

b*) Para buscar una ecuación paramétrica precisamos dos vectores directores del plano:* $\mathbf{u} := (2,1,0) - (1,0,0) = (1,1,0)$ *y* $\mathbf{v} = (3,0,1) - (1,0,0) = (2,0,1)$*. Una ecuación vectorial para el plano es* $(x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(2,0,1)$ *y escribiendo esta identidad en coordenadas obtenemos una ecuación paramétrica:*

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

*Despejando los parámetros* $\lambda$ *y* $\mu$ *de dos de las identidades y sustituyendo en la tercera se obtiene una ecuación reducida para el plano. En este caso, los parámetros están ya despejados:* $\lambda = y$ *y* $\mu = z$*, y luego obtenemos la ecuación reducida* $x = 1 + y + 2z$*.*

## 5.5. Práctico 5.

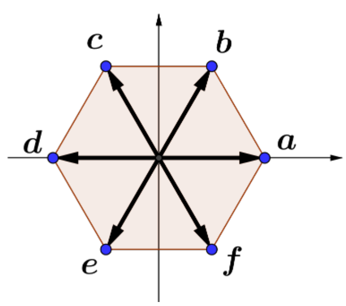
# Práctico 5.

Geometría en el espacio. Rectas y planos.

**Ejercicios sugeridos:**

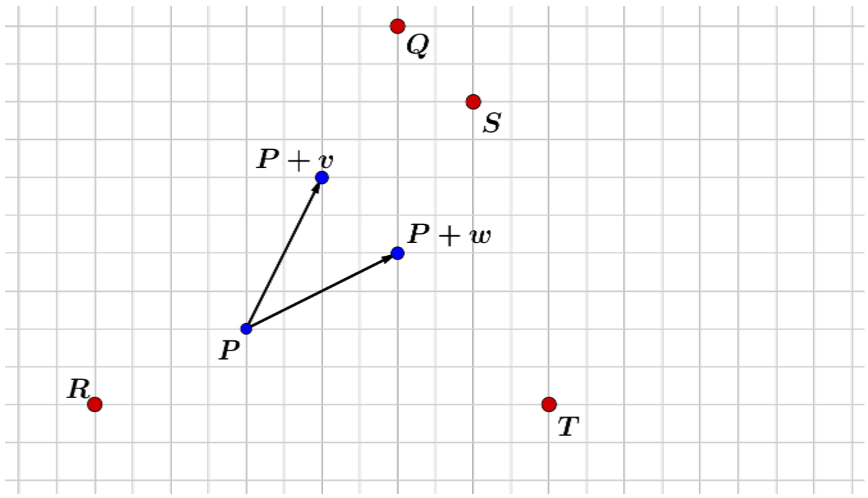
## 5.6. Puntos y vectores.

1. **Polígonos regulares.** Considere el hexágono regular centrado en el origen que se muestra en la figura.




   a) ¿Cuánto da la suma de los vectores $a, b, ..., f$?
   b) ¿Qué ocurre si sumamos todos menos $a$?
   c) Discutir qué ocurre con el triángulo regular $a, c, e$.

2. Para el plano representado en la siguiente figura determinar $\lambda$ y $\mu$ tal que $Q = P + \lambda v + \mu w$. Repetir para $R$, $S$ y $T$.




## 5.7. Ecuación del plano y de la recta.

1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:
   *a*) la que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$, con vector director $v = (2, 1, 3)$;
   *b*) la que pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

2. *a*) Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -2 + \lambda. \end{cases}$$

   *b*) Repetir para los puntos $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$, y la recta que tiene ecuaciones reducidas

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

   *c*) Averiguar si los puntos $(1, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$ y $(3, -1, 1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que determinan.
   *d*) Repetir para $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 3)$.

3. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:
   *a*) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y tiene a $(2, -1, 1)$ y $(1, 0, -1)$como vectores directores;
   *b*) el que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 3)$ y $(1, 1, -2)$;
   *c*) el que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y contiene a la recta $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$

4. *a*) Demostrar que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores no colineales, es decir, ninguno es múltiplo del otro, el sistema de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

es compatible si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

*b*) Concluir que el plano de ecuaciones paramétricas tiene una ecuación reducida de la forma

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (x - p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} (y - p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (z - p_3) = 0.$$

*c*) Usar este resultado para hallar una ecuación reducida del plano cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + \lambda - \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -1 - \lambda - 2\mu. \end{array}\right. .$$

5. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x - 3y + 4z = -2, \qquad \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{array}\right.$$

6. Se consideran los planos de ecuaciones

$$2x + y + z - 2 = 0, \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + 2\mu, \\ y = -3 + \lambda - \mu, \\ z = \lambda + \mu, \end{array}\right. ,$$

y las rectas de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - 3z = -6, \\ x + 2y - 4z = -8, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda \end{array}\right. .$$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

7. Para cada una de las ternas de planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$ que se proponen a continuación, hallar la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

   *a*) $\pi_1\colon y + z = 0$, $\pi_2\colon 2x - y - 2z = 5$, $\pi_3\colon 3x + 3y + 2z = 7$.

   *b*) $\pi_1\colon x + 2y - z = 2$, $\pi_2\colon 2x + y - 3z = 0$, $\pi_3\colon -2x - 4y + 2z = 3$.

   *c*) $\pi_1\colon x - 2y + z = 5$, $\pi_2\colon x + z = 3$, $\pi_3\colon x + 4y + z = 0$.

8. Hallar ecuaciones paramétricas de una recta que no corte a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3$$

y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$.

9. Sean $\pi$ el plano dado por $\pi : x + y + z = 3$ y $r$ la recta dada por $r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(a, b, 1)$. Discutir la intersección de $r$ y $\pi$ en función de $a$ y $b$.

### 5.7.1. Solución de ejercicios seleccionados del Práctico 5.

**Puntos y vectores.**

1 a. La suma de los vectores da el vector nulo.

b. La suma de todos menos $a$ da el vector $d$.

c. Sumar $c$ y $e$ da el vector $d$ que es opuesto a $a$ por lo que hacer $a + c + e = a + d$ que es el vector nulo.

**Ecuación del plano y de la recta.**

1 a. Sustituyendo los datos en la ecuación vista en el teórico, llegamos a que la ecuación paramétrica de la recta es $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$

Para pasar a la ecuación implícita, podemos despejar $\lambda$ de una de las ecuaciones y sustituir en las otras. Por ejemplo, tomando la segunda ecuación, tenemos que $\lambda = y - 2$. Sustituyendo en la primera y la tercera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3y + z = -1 \end{cases}$$

b. A partir de los puntos $A$ y $B$, podemos encontrar un vector director de la recta: $v = \overrightarrow{BA}$ y entonces la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

De forma análoga a la parte anterior, obtenemos la ecuación reducida:

$$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

3 a. La ecuación paramétrica es:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Como en el caso de las rectas, podemos despejar los parámetros $\lambda$ y $\mu$ en función de las variables $x, y, z$ para pasar a la ecuación reducida:

$$x + 3y + z = 5$$

b. La paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

La reducida es:

$$x - y = 0$$

c. Dado que la recta está contenida en el plano, alcanza encontrar dos puntos de ésta y junto con el punto $P = (1, 1, 1)$, estamos en un caso análogo al de la parte anterior. Si por ejemplo consideramos los puntos $Q = (0, 0, -2)$ y $R = (0, -1, -1)$ y los vectores $v = \overrightarrow{QP}$ y $w = \overrightarrow{RP}$, la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 1\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

y la implícita es

$$-4x + y + z = -2$$

5 Para hallar la intersección, debemos armar un sistema con las ecuaciones de ambos planos. Para esto, consideramos la ecuación reducida del segundo plano:

$$5x - 3y - z = 15$$

Entonces, la intersección de los planos es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -2 \\ 5x - 3y - z = 15 \end{cases}$$

Dado que el sistema es compatible indeterminado con un gradao de libertad, tenemos que la intersección es una recta.

6 Si $\pi_1 : 2x + y + z - 2 = 0$ y $r_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$ , tenemos que la intersección es

$$\pi_1 \cap r_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$$

Que es un sistema compatible determinado y su solución es $(0, 0, 2)$. Es decir, la recta y el plano se intersectan en un punto.

Si $r_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

entonces podemos pasar $r_2$ a reducida de modo que la intersección $r_2 \cap \pi_2$ esté determinada por la solución de un sistema de 3 ecuaciones donde aparecen las dos de $r_2$ y el plano.

Otra forma de pensar el ejercicio es sustituir en la ecuación del plano los valores de $x, y, z$ como están dados en la ecuación de la recta y estudiar para cuáles $\lambda$ la eucación obtenida tiene solución. Es decir

$$r_2 \cap \pi_1 : 2(3+\lambda) + (4+\lambda) + (1-3\lambda) - 2 = 2\lambda + \lambda - 3\lambda + 6 + 4 + 1 - 2 = 9 \neq 0$$

Y concluimos que su intersección con $\pi_1$ es vacía.

6 La intersección de estos planos es la recta dada por

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Es claro aue cualquier recta paralela a esta y no coincidente, será paralela a ambos planos y por lo tanto no cortará a ninguno de ellos.

El vector $(1, 1, -2)$ es vector director de esta recta. Teniendo en cuenta que el punto $(10, 11, 12)$ no está en ninguno de los planos, conseguimos la siguiente recta

$$\begin{cases} x = 10 + \lambda \\ y = 11 + \lambda \\ z = 12 - 2\lambda \end{cases}$$

que no corta a ninguno de los planos.

Una forma de convencerse de esto es notar que dados dos vectores directores directores $v$ y $w$ de cualquiera de los planos, podemos escribir al vector director de la recta como

$$(1, 1, -2) = \alpha v + \beta w$$

para algunos valores de $\alpha$ y $\beta$, por lo tanto, la recta tiene direccción paralela al plano.

9 Pasando $r$ a forma reducida, tenemos que la intersección entre la recta y el plano está dada por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - az = 0 \\ y - bz = 0 \end{cases}$$

Si $a+b \neq -1$, el sistema es compatible determinado y la recta corta al plano en el punto $(\frac{3a}{1+a+b}, \frac{3b}{1+a+b}, \frac{3}{1+a+b})$.

Si $a + b = -1$, el sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

## 5.8. Producto escalar.

En el espacio $\mathbb{R}^n$, podemos definir un tipo de producto entre sus elementos, que son los vectores que componen el espacio. Este producto enriquece el espacio con propiedades geométricas que nos permiten explorarlo más profundamente. Se conoce como el producto punto o producto escalar, y es un tipo de producto interno que se puede definir en espacios vectoriales como se verá luego.

El **producto punto** en $\mathbb{R}^n$ es una función que toma dos vectores $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^n$ y los asocia con un número real $u \cdot v$, también llamado **producto escalar** de $u$ e $v$, a menudo denotado como $< u, v >$. Se define como:

$$u \cdot v = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

donde $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

El siguiente teorema enumera las propiedades más importantes del producto punto.

**Teorema 5.1** *Para cada $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vectores en $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $u \cdot u$ es siempre no negativo, y es igual a cero si y solo si $u$ es el vector nulo.
2. $u \cdot v = v \cdot u$, lo que significa que el producto punto es conmutativo.
3. $(u + w) \cdot v = u \cdot v + w \cdot v$, lo que implica que el producto punto es distributivo sobre la suma vectorial.
4. $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$ para todo escalar $\lambda$ en $\mathbb{R}$.

**Demostración:**

1. Al considerar el producto punto $u \cdot u$

$$u \cdot u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Cada término $x_i^2$ es no negativo, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Por lo tanto, la suma de términos no negativos también es no negativa. Además, $u \cdot u$ es igual a cero si y solo si cada $x_i$ es igual a cero. Así que $u \cdot u = 0$ si y solo si $u = \mathbf{0}$.

2. 

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \ldots + y_n x_n = v \cdot u.$$

3. Consideremos el producto punto de $u + w$ con $v$:

$$(u + w) \cdot v = (x_1 + z_1)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 + \ldots + (x_n + z_n)y_n.$$

Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma en $\mathbb{R}$:

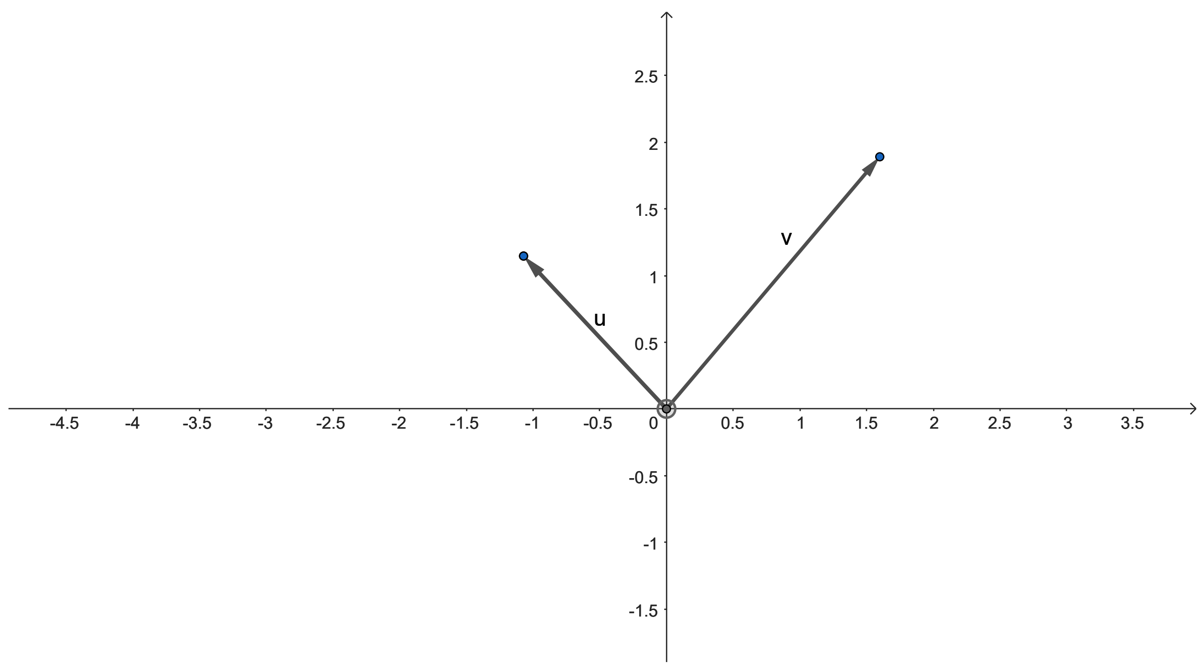
$$(u+w)\cdot v = x_1y_1+z_1y_1+x_2y_2+z_2y_2+\ldots+x_ny_n+z_ny_n = (x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)+(z_1y_1+z_2y_2+\ldots+z_ny_n) = u\cdot v+w\cdot v$$

4. Consideremos el producto punto de $\lambda u$ con $v$:

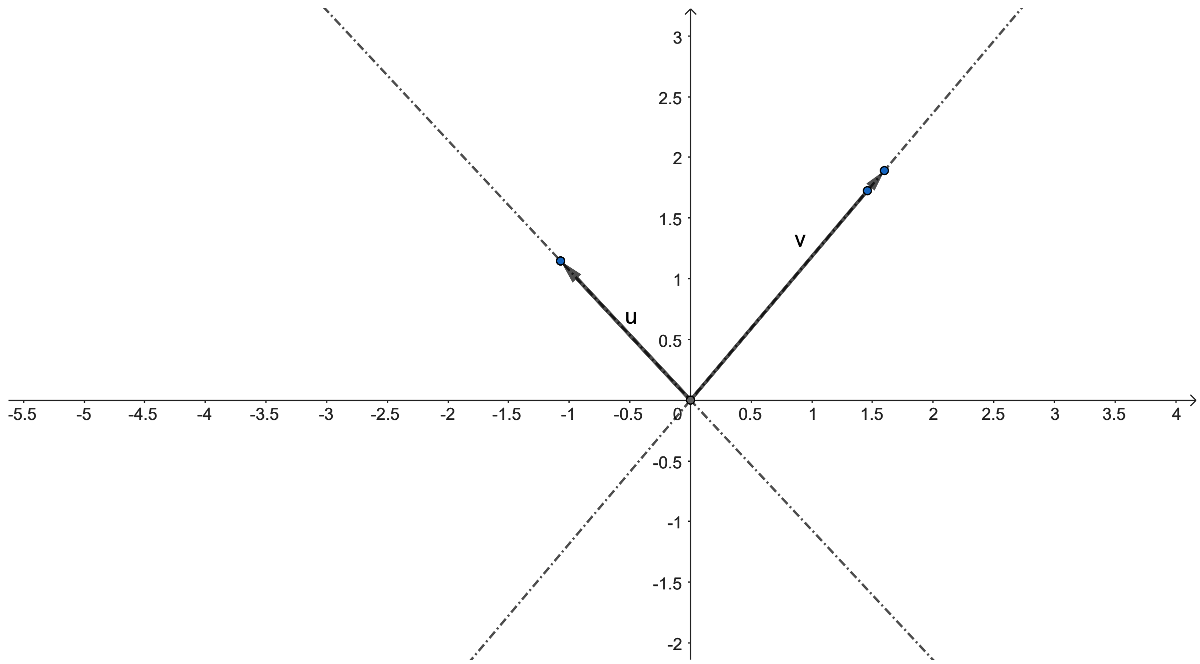
$$(\lambda u) \cdot v = (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 + \ldots + (\lambda x_n)y_n) = \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n) = \lambda(u \cdot v).$$

### 5.8.1. Interpretación geométrica.

Para motivar la definición de ortogonalidad o perpendicularidad de vectores en $\mathbb{R}^n$, examinemos cómo se presenta esta noción entre dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Consideremos los vectores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y supongamos que son perpendiculares con $y_1, y_2 \neq 0$, como se muestra en la siguiente figura.




La recta en la que se encuentra el vector $u$ tiene una pendiente de $\frac{x_2}{x_1}$, y la que contiene el vector $v$ tiene una pendiente de $\frac{y_2}{y_1}$.




Estas rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1. En otras palabras, los vectores $x$ e $y$ serán perpendiculares si y solo si:

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = -1$$

Lo cual se simplifica a:

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0$$

El lado izquierdo de esta última expresión no es más que el producto punto de $u$ e $v$. Por lo tanto, en el plano $\mathbb{R}^2$, la perpendicularidad de vectores es equivalente a que su producto punto sea igual a cero. Esta observación nos lleva a la siguiente definición, que generaliza la idea de perpendicularidad de vectores en el espacio $\mathbb{R}^n$.

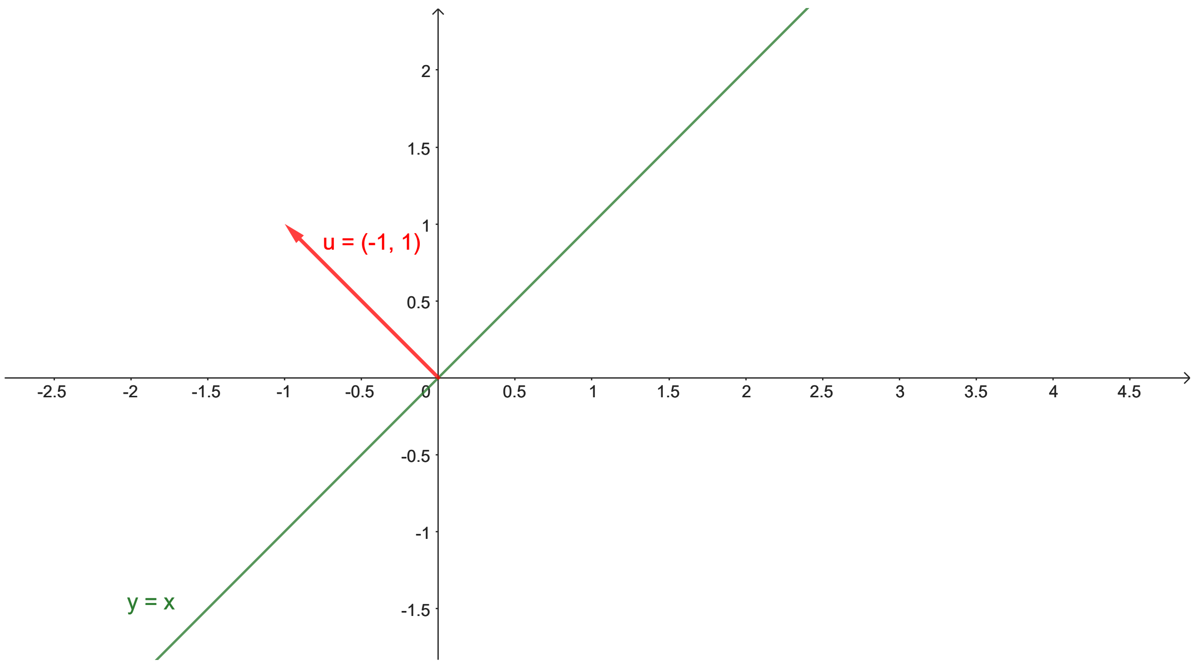
**Definición 5.2** *Se dice que dos vectores $u$ e $v$ en $\mathbb{R}^n$ son* ***ortogonales*** *si $u \cdot v = 0$.*

De acuerdo con esta definición, el vector $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$ es ortogonal a cualquier vector $u$ en $\mathbb{R}^n$, ya que es claro que $\mathbf{0} \cdot u = 0$ para cualquier $u$ en $\mathbb{R}^n$. Además, el vector cero es el único vector en $\mathbb{R}^n$ con esta propiedad. En efecto: si $u$ en $\mathbb{R}^n$ es tal que $u \cdot v = 0$ para todo $v$ en $\mathbb{R}^n$, entonces, en particular, se tiene $u \cdot u = 0$, y atendiendo a la primera propiedad del producto punto enunciada en el teorema anterior, se concluye que $u$ es el vector cero.

**Ejemplo 5.8** *1. Sea $u = (-1, 1)$. El vector $v = (x, y)$ es ortogonal a $u$ si, y solo si*

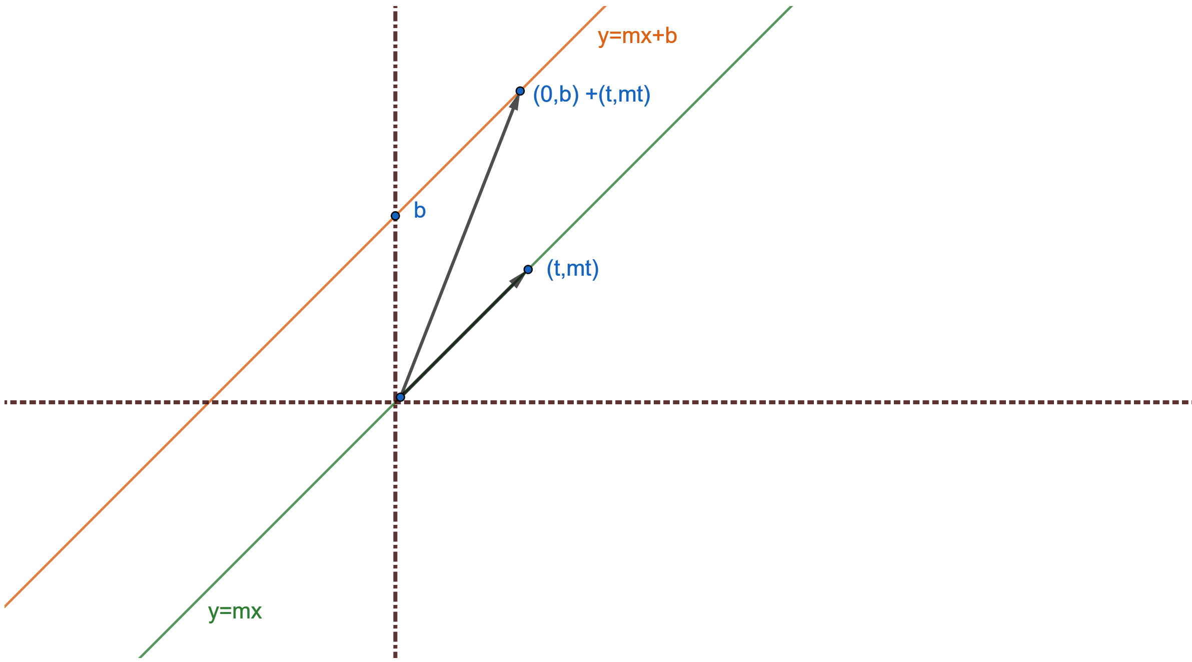
$$-1 \cdot x + (1) \cdot y = -x + y = 0.$$

*Observamos que el conjunto de todos los vectores $v$ con esta propiedad constituyen geométricamente la recta $y = x$.*




*En un sentido más general, si* $u = (m, -1)$*, donde* $m$ *es un número real dado, los vectores* $v = (x, y)$ *ortogonales a* $u$ *son aquellos para los cuales* $u \cdot v = mx - y = 0$*. Estos vectores representan geométricamente la recta* $y = mx$*, que es una recta por el origen con pendiente* $m$*. Por lo tanto, podemos afirmar que la recta* $y = mx$ *es el conjunto de todos los vectores en el plano que son ortogonales al vector* $(m, -1)$*.*

*En general, la recta* $y = mx + b$*, con pendiente* $m$ *y ordenada al origen* $b$*, se puede describir como el conjunto de puntos* $(x, y)$ *en el plano que se expresan como* $(0, b) + (t, mt)$*, donde* $t$ *es un número real. Esto se puede verificar directamente. Esto significa que los vectores* $(x, y)$ *en la recta* $y = mx + b$ *son vectores que se obtienen sumando el vector constante* $(0, b)$ *con vectores del tipo* $(t, mt)$ *que son ortogonales a* $(m, -1)$ *(en otras palabras, estos vectores* $(t, mt)$ *pertenecen a la recta* $y = mx$*).*




2. *Dado el vector no nulo* $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*, el conjunto de vectores* $v \in \mathbb{R}^3$ *que son ortogonales a* $u$ *está formado por los vectores* $v = (x, y, z)$ *tales que* $u \cdot v = ax + by + cz = 0$*. Esta ecuación representa geométricamente un plano que pasa por el origen.*

**Norma y longitud de un vector.**

Usando del producto punto, el cual hemos estudiado en la sección anterior y que nos proporciona en $\mathbb{R}^n$ el concepto geométrico de ortogonalidad de vectores, podemos introducir una noción de tamaño de un vector y de distancia entre dos vectores (o distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^n$).

Definimos la **norma** (más precisamente, la norma euclidiana) de un vector $u \in \mathbb{R}^n$, denotada como $\|u\|$, de la siguiente manera:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

De acuerdo con la primera propiedad del producto punto de vectores, esta definición tiene sentido, ya que lo que está dentro de la raíz cuadrada siempre es un número no negativo. En concreto, si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces tenemos:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

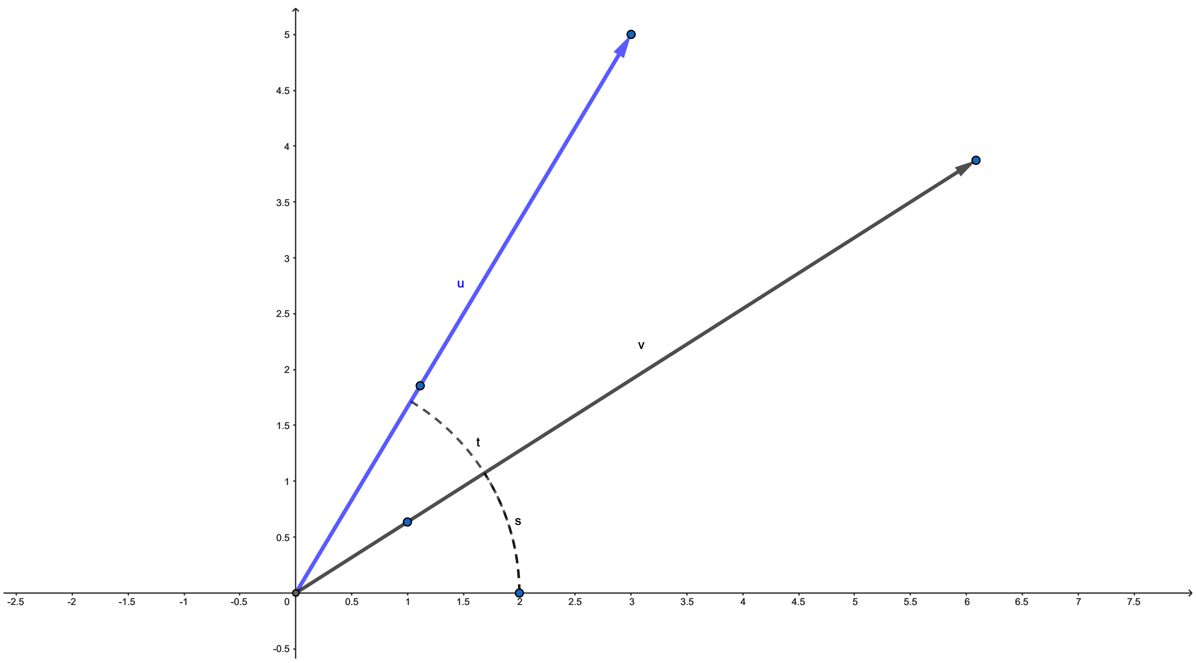
Decimos que el vector $u$ es **unitario** si $\|u\| = 1$.

Analizando los casos de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, debe quedar claro que esta noción de norma de un vector, que hemos definido de manera general en el espacio $\mathbb{R}^n$, nos proporciona una medida del tamaño o longitud del vector. En efecto, si $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces tenemos $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, que es precisamente la distancia del punto $(x, y)$ al origen (es decir, es el tamaño del vector $u$.

## Ángulo entre vectores de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^2$, podemos definir la noción de ángulo entre los vectores $v = (x_1, y_1)$ y $u = (x_2, y_2)$ [2] de la siguiente manera:

Para calcular este ángulo, consideramos la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(x_2, y_2)$, y la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(x_1, y_1)$. Estas rectas tienen pendientes $\tan(t+s) = \dfrac{y_2}{x_2}$ y $\tan(s) = \dfrac{y_1}{x_1}$, respectivamente.




Entonces, el ángulo $t$ (el ángulo entre los vectores $u$ y $v$) se puede expresar como:

$$t = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) - \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan\left(\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 x_1 + y_2 y_1}\right)$$

Al expresar la fórmula en función del coseno, obtenemos:

$$\cos t = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2 \|v\|^2}$$

De donde tenemos que el producto punto en $\mathbb{R}^2$ satisface:

$$u \cdot v = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos t.$$

Por lo tanto,

$$t = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|^2 \|v\|^2}.$$

Para definir el ángulo entre dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ nos inspiraremos en lo discutido anteriormente, para ello es necesario probar primero el siguiente resultado

[2]Vistos como vectores anclados en el origen.

**Teorema 5.2** ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*** *Para cada $u$ y $v$ vectores en $\mathbb{R}^n$ se cumple*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

**Demostración:** Si $u = \mathbf{0}$, ambos lados de la desigualdad son iguales a cero (y, en este caso, la desigualdad es cierta).

Sea entonces $u \neq \mathbf{0}$. Consideremos el vector $w = v + \lambda u$, donde $\lambda$ es un número real fijo, pero arbitrario. Calculemos el producto punto de $w$ consigo mismo

$$\begin{aligned} w \cdot w &= (v + \lambda u) \cdot (v + \lambda u) \\ &= (v \cdot v) + 2(v \cdot u)\lambda + (u \cdot u)\lambda^2. \end{aligned}$$

La función $f(\lambda) = (u \cdot u)\lambda^2 + 2(u \cdot v)\lambda + (v \cdot v)$ es una función polinómica cuadrática que representa geométricamente una parábola que abre hacia arriba (ya que $u \cdot u$ es positivo). Puesto que $f(\lambda)$ es siempre no negativa para todo $\lambda$, el discriminante de la ecuación cuadrática:

$$2(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

debe ser negativo o cero. Entonces:

$$(2(u \cdot v))^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v) \leq 0$$

Por lo tanto,

$$(u \cdot v)^2 - (u \cdot u)(v \cdot v) \leq 0$$

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v).$$

Usando el resultado anterior, observamos que para cada par de vectores $u$ y $v$ en $\mathbb{R}^n$, al tomar la raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad se obtiene:

$$|u \cdot v| \leq \sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v} = \|u\|\|v\|.$$

En consecuencia,

$$-1 \leq \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

y existe un único ángulo $0 \leq t \leq \pi$ tal que

$$\cos t = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

Definimos este ángulo como el **ángulo formado por los vectores** $u$ **y** $v$.

**Proposición 5.1** *Sean $u, v$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y $c$ un número real. Se tiene:*

1. $||u|| \geq 0$, *y* $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$.
2. $||cu|| = |c| \cdot ||u||$.
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *(Desigualdad triangular).*

**Demostración:** Demostraremos solamente el item 3, los restantes quedan como ejercicio a cargo del lector. Para demostrar la desigualdad triangular, escribimos:

$$||u + v||^2 = (u + v) \cdot (u + v) = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2,$$

utilizando la bilinealidad del producto punto. Luego, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$||u+v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2,$$

y tomando la raíz cuadrada en ambos lados obtenemos la desigualdad triangular.

Recordemos que dos planos en $\mathbb{R}^3$ son paralelos si sus vectores normales son paralelos. Se dice que son **perpendiculares** si sus vectores normales son perpendiculares. El **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo formado por sus vectores normales. Del mismo modo dos rectas en $\mathbb{R}^3$ son paralelas si sus vectores directores son paralelos. Se dice que son **perpendiculares** si sus vectores directores son perpendiculares. El **ángulo entre dos rectas** se define como el ángulo formado por sus vectores directores.

**Ejemplo 5.9** 1. *Dados los planos $x+y+z=1$ y $z=0$, el ángulo que forman estos planos corresponde al ángulo que forman sus vectores directores $u=(1,1,1)$ y $v=(0,0,1)$. Por lo tanto,*

$$\cos t = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. ***Ejercicio 6. Examen GAL1. Diciembre 2015.*** *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, consideramos la recta $r$ definida como $(x,y,z) = (0,a,1) + \lambda(a,b,1)$ y el plano $\pi$ definido por $x-y+z=2$. Indicar para cuáles valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la recta $r$ es paralela a $\pi$ pero no contenida en $\pi$.*

   *(A)* $b = a+1$, *para cualquier* $a$.

   *(B)* $a \neq -1$ *y* $b = a+1$.

   *(C)* $a = 1$ *y* $b = -1$.

   *(D)* $a \neq 1$ *y* $b = a+1$.

   ***Solución:*** *Opción B: La recta $r$ tiene vector director $\mathbf{v} = (a,b,1)$ y el plano $\pi$ tiene vector normal $n = (1,-1,1)$. Entonces, la recta $r$ es paralela al plano $\pi$ cuando $v \cdot n = a - b + 1 = 0$, es decir, cuando $b = a+1$. En el caso donde $b = a+1$ ($r$ es paralela a $\pi$), la recta $r$ está contenida en $\pi$ cuando $A = (0,a,1) \in \pi$, es decir, cuando $-a+1 = 2$, dicho de otra manera, cuando $a = -1$. Luego, la recta $r$ es paralela a $\pi$ y no contenida en $\pi$ cuando $b = a+1$ y $a \neq -1$.*

3. ***Ejercicio 4.1 y 4.2. Primer Parcial GAL1. 16 Septiembre 2023.*** *Se consideran las siguientes rectas:*

$$r_1 : \begin{cases} x+y=3 \\ z=2 \end{cases} \quad , \quad r_2 : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

   ***Pregunta 4.1:*** *Las rectas $r_1$ y $r_2$*

   *(A) se cortan y son perpendiculares.*

   *(B) se cortan pero no son perpendiculares.*

   *(C) son paralelas.*

   *(D) no se cortan y no son paralelas.*

   *(E) son iguales.*

   ***Pregunta 4.2:*** *Sea $\pi$ el plano que contiene a $r_2$ y al punto (1, 2, 3). Un vector normal de $\pi$ es*

*(A)* $(1,-1,0)$.

*(B)* $(2,3,1)$.

*(C)* $(1,1,-1)$.

*(D)* $(5,-4,1)$.

*(E)* $(7,-5,1)$.

***Solución:***

*Pregunta 4.1. Una ecuación paramétrica para la recta $r_1$ es:*

$$\begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

*Por lo tanto, el vector director de $r_1$ es $(-1,1,0)$. De la ecuación de $r_2$, deducimos que su vector director es $(1,1,-1)$. Al realizar el producto punto entre estos dos vectores, obtenemos:*

$$(-1,1,0)\cdot(1,1,-1) = 0$$

*Por lo tanto, las rectas $r_1$ y $r_2$ son perpendiculares. Además, es rutina verificar que $r_1 \cap r_2 = \{(1,2,2)\}$. La opción correcta es la opción A.*

*Pregunta 4.2. El plano $\pi$ buscado debe tener una normal perpendicular a la dirección de la recta $r_2$ $(1,1,-1)$. Por lo tanto, podemos descartar las opciones B, C y E.*

*Ahora descartemos la opción D: Si un vector normal al plano $\pi$ fuera $(5,-4,1)$, entonces el plano buscado sería de la forma $5x-4y+z=d$. Dado que $(1,2,3)\in\pi$, tendríamos que $d=0$. Entonces $\pi : 5x-4y+z=0$. Como el plano $\pi$ contiene a la recta $r_2$, el punto $(2,3,1)$ debería satisfacer la ecuación del plano, lo cual no es cierto.*

*Por lo tanto, la opción correcta es la A.*

Estudiemos ahora el concepto de **distancia entre dos vectores** en $\mathbb{R}^n$. Recordemos que el vector diferencia $u-v$ de $u,v\in\mathbb{R}^n$ es un vector que conecta los puntos finales de las flechas que representan a $u$ y $v$. La norma de este vector es entonces una medida de la distancia que separa a los puntos $u$ y $v$ en el espacio $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, la definición que usaremos de distancia entre dos vectores en $\mathbb{R}^n$ es: dados $u,v\in\mathbb{R}^n$, definimos la distancia entre $u$ y $v$, y la denotamos por $d(u,v)$, como:

$$d(u,v) = \|u-v\|.$$

Para $n=2$ : La distancia entre los puntos $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ es

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Para $n=3$ : Si $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ son dos puntos en $\mathbb{R}^3$, entonces la distancia entre ellos es

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

## 5.9. Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

En esta sección estudiaremos un nuevo producto entre vectores en $\mathbb{R}^3$. Con él, podremos analizar de nuevo las ecuaciones de planos en $\mathbb{R}^3$. Una diferencia fundamental de este nuevo producto es que será un vector en $\mathbb{R}^3$, mientras que el producto punto es, como sabemos, un escalar.

Dados dos vectores $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$ definimos el **producto vectorial** de $u$ y $v$ y lo denotamos por $u \wedge v$, de la siguiente manera:

$$u \wedge v := (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Una regla mnemotécnica que facilita recordar la definición anterior es emplear el siguiente determinante.

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Una de las propiedades fundamentales del vector $u \wedge v$ es que es perpendicular a ambos vectores $u$ y $v$.

$$u \wedge v \cdot u = 0$$

$$u \wedge v \cdot v = 0$$

En efecto,

$$u \wedge v \cdot u = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) \cdot (x_1, y_1, z_1) = (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_1 + (z_1 x_2 - x_1 z_2) y_1 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_1$$

$$u \wedge v \cdot u = y_1 z_2 x_1 - z_1 y_2 x_1 + z_1 x_2 y_1 - x_1 z_2 y_1 + x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_1 = 0$$

Además, de que el vector $u \wedge v$ es perpendicular a $u$ y $v$, su dirección sigue la regla de la mano derecha: usando la mano derecha, coloque su dedo pulgar perpendicular a los demás dedos; alinee la dirección de los cuatro dedos con la del vector $u$ de manera que, cerrando la mano, esta pueda seguir hacia el vector $v$. La dirección hacia donde apunta su dedo pulgar es la dirección de $u \wedge v$.

**Ejemplo 5.10** *Sean $u = (1, 3, 5)$ y $v = (0, 5, 6)$. Se tiene*

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (-7, -6, 5).$$

**Teorema 5.3** *Sean $u, u', v, v'$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $\lambda$ un escalar. Entonces:*

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ *(anticonmutatividad)*
2. $u \wedge (v + \lambda v') = u \wedge v + \lambda u \wedge v'$
3. $(u + \lambda u') \wedge v = u \wedge v + \lambda u' \wedge v$
4. $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin t$, *donde $t$ es el ángulo entre $u$ y $v$.*

**Demostración:** Demostraremos solamente los items 1 y 4. Dejaremos los restantes a cargo del lector.

1. Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$.

$$u \wedge v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} = -(v \wedge u)$$

2.

$$\begin{aligned}
\|u \times v\|^2 &= (y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (z_1x_2 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= y_1^2z_2^2 - 2y_1z_2z_1y_2 + z_1^2y_2^2 + z_1^2x_2^2 - 2z_1x_2x_1z_2 + x_1^2z_2^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2 \\
&= (x_1 + y_1 + z_1)^2(x_2 + y_2 + z_2)^2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 t \\
&= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2 t) \\
&= \|u\|^2\|v\|^2 sen^2 t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin t$.

**Ejemplo 5.11** *1.* ***Ejercicio 3. Examen GAL1 . Diciembre 2015.*** *Sean dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces:*

*(A)* $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) + (v \wedge v)$

*(B)* $(u + v) \wedge (u - v) = (u \wedge u) - (v \wedge v)$

*(C)* $(u + v) \wedge (u - v) = 2(u \wedge v)$

*(D)* $(u + v) \wedge (u - v) = -2(u \wedge v)$

***Solución:*** *Opción D: En efecto, tenemos que*

$$(u+v)\wedge(u-v) = (u\wedge(u-v))+(v\wedge(u-v)) = (u\wedge u)-(u\wedge v)+(v\wedge u)-(v\wedge v) = -(u\wedge v)+(v\wedge u) = -2(u\wedge v)$$

*2.* ***Ejercicio 4. Examen GAL1 . Diciembre 2015.*** *Para todos los vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$:*

*(A)* $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

*(B)* $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2 + 2(u \cdot v) + ||v||^2$

*(C)* $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = ||u||^2||v||^2$

*(D)* $(u \cdot v)^2 + ||u \wedge v||^2 = 2||u||^2||v||^2$

***Solución:*** *Opción C: Sea $\theta$ el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = |\sin(\theta)|\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$. Luego, tenemos que:*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2 + \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \cos^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 + \sin^2(\theta)\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2.$$

3. ***Ejercicio 6 (Verdadero-falso). Examen GAL1 . Febrero 2016.*** *Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Sean* $u$, $v \in \mathbb{R}^3$. *Si* $||u|| = ||v|| = 2$, $u \cdot v \geq 0$ *y* $||u \times v|| = 2\sqrt{3}$, *entonces* $||u - v|| = 2$.

   ***Solución:*** *La afirmación es verdadera. En efecto, sea* $\alpha \in [0, \pi]$ *el ángulo formado por los vectores* $u$ *y* $v$. *Dado que* $||u \wedge v|| = \sin\alpha \|u\|\|v\|$, *obtenemos* $\sin\alpha = \frac{||u\wedge v||}{|u||v|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *En consecuencia,* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *o* $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. *Sin embargo, al considerar que* $u \cdot v \geq 0$, *concluimos que* $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. *Por lo tanto,* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *(*$= 60°$*). Dado que los vectores* $u$ *y* $v$ *tienen la misma norma* $\|u\| = \|v\| = 2$, *forman un triángulo equilátero. De esta manera, el tercer lado del triángulo, representado por el vector* $u - v$, *tiene igual norma:* $\|u - v\| = 2$.

4. ***Ejercicio 3. Examen GAL1 interactiva. Diciembre 2023.*** *Sea* $s$ *la recta tal que* $(1, 1, 1) \in s$, $s \perp (1, 1, 0)$ *y* $s \perp (1, -1, 1)$, *y sea* $\pi$ *el plano de ecuación reducida* $x + y + z = 1$.

   a) *Hallar una ecuación vectorial para* $s$. *Justificar paso a paso el resultado.*

   b) *Hallar la intersección entre* $s$ *y* $\pi$. *Justificar paso a paso el resultado.*

   ***Solución:*** *Tenemos que calcular un vector director de* $s$. *Un tal vector de coordenadas* $(a, b, c)$ *debe cumplir que* $0 = \langle (a, b, c), (1, 1, 0) \rangle = a + b$ *y* $0 = \langle (a, b, c), (1, -1, 1) \rangle = a - b + c$. *Estas dos condiciones dan un sistema lineal homogéneo en* $a, b, c$ *y hay que buscar alguna solución no nula (ejercicio). Una forma alternativa de hallar directamente un vector ortogonal a los dos vectores dados es mediante un producto vectorial:*

$$(1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (1, -1, -2).$$

   *Una ecuación vectorial para esta recta es:* $(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, -2)$.

   *Para hallar la intersección* $\pi \cap s$ *basta con hallar una ecuación reducida para* $s$ *y resolver el sistema lineal correspondiente a la intersección con* $\pi$*:*

   *Una ecuación paramétrica para* $s$ *es*

$$\begin{cases} x = 1 + 1\lambda \\ y = 1 + (-1)\lambda \\ z = 1 + (-2)\lambda \end{cases}$$

   *Despejando* $\lambda$ *de la primera ecuación y sustituyendo en las otras dos se obtiene la ecuación reducida:*

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ z = 3 - 2x \end{cases}$$

   *La intersección corresponde entonces a resolver el sistema lineal:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

   *cuya única solución es (el punto de coordenadas):* $(2, 0, -1)$.

## 5.10. Práctico 6.

**Ejercicios sugeridos:**

# Práctico 6

Producto escalar y vectorial.

## 5.11. Producto escalar y producto vectorial.

1. Dados los vectores $u = (2, -1, 7)$, $v = (1, 1, -3)$ y $w = (1, -1, 2)$ calcular:

    *a*) $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u, v\rangle$, $u \wedge v$, $\|u \wedge v\|$.

    *b*) $u \wedge (v \wedge w)$ y $(u \wedge v) \wedge w$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.

2. **Productos notables.**

    Sean $x$ e $y$ vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

    *a*) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.

    *b*) $\langle x + y, x - y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

    *c*) **Regla del paralelogramo.** $\frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3. Sean $u$ y $v$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

    *a*) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre $u$ y $v$ es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a $u$.

    *b*) Hallar $\|v\|$ y $\|u + v\|$ sabiendo que el ángulo entre $u$ y $v$ es $\pi/4$, que $\|u\| = 3$ y que el ángulo entre $u + v$ y $u$ es igual a $\pi/6$.

    *c*) ¿Es cierto que si $v$ es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u, v\rangle = \langle w, v\rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

4. Dados dos vectores $u$ y $v$ de $\mathbb{R}^3$, hallar:

    *a*) todos los vectores $w$ para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

    *b*) todos los vectores $w$ para los que se satisface $\langle u, w\rangle = \langle u, v\rangle$.

5. Calcular el producto vectorial

    $$(a_{11}, a_{12}, 0) \wedge (a_{21}, a_{22}, 0)$$

    y usarlo para analizar la interpretación del determinante

    $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

    como un área orientada.

## 5.12. Revisitando ecuaciones de rectas y planos.

1. **Ecuaciones de planos y vectores normales.**

   *a*) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-3, 1, 0)$ y es perpendicular a $(-1, 2, 3)$.

   *b*) Expresar el plano $\pi$ de ecuación $x - y + 3z = 1$ como $\langle P - P_0, N\rangle = 0$, donde $P = (x, y, z)$ es un punto genérico, $N$ es un vector perpendicular al plano, y $P_0$ es un punto a determinar.

   *c*) Hallar dos versores que sean perpendiculares al plano $2x+y = 0$. Recordar que un versor es un vector de norma 1.

2. Probar que las rectas son ortogonales.

$$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

3. **Trazado de perpendiculares.** Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que pasa por el punto $(4, 4, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y = 0$.

4. En cada caso, hallar las ecuaciones reducida y paramétrica de la recta que satisface las condiciones especificadas:

   *a*) pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular al plano $2x + y + 3z - 1 = 0$.

   *b*) Pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, se intersecta con la recta

$$P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5),$$

   y es ortogonal a la recta

$$\begin{cases} x = -1 + 6\lambda, \\ y = -3 - 2\lambda, \\ z = 2 - 3\lambda. \end{cases}.$$

   *c*) Pasa por el punto $(1, 1, 1)$ e intersecta perpendicularmente a la recta

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}.$$

   *d*) Pasa por el punto $(-4, -5, 3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta de ecuación paramétrica

$$P = (-1, -3, 2) + \lambda(3, -2, -1).$$

## 5.13. Distancias entre elementos geométricos.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función que preserva las distancias, es decir, que para cualquier par de puntos $P, Q$ se cumple $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$. Observar que esto es lo mismo que $\|P - Q\| = \|f(P) - f(Q)\|$, es decir, preserva la norma de los vectores. Se sabe además que $f(O) = O$.

   Probar que $f$ preserva ángulos, es decir que si el ángulo entre dos vectores no nulos $u$ y $v$ es $\alpha$ entonces el ángulo entre $f(v)$ y $f(u)$ también es $\alpha$.

2. Determinar la distancia entre los plano $\pi_1$ y $\pi_2$ siendo

   *a*) $\pi_1 : x + y + z = 1,\ \pi_2 : x + y + z = 5$ *b*) $\pi_1 : x + 2y - z = 1,\ \pi_2 : 2x + 4y - 2z = -1$

3. Determinar la distancia entre el plano $\pi$ y el punto $P$, siendo

   *a*) $\pi : x + y + z = 0,\ P = (2, 2, 4)$ *b*) $\pi : x = 0,\ P = (2, 3, 4)$

4. Hallar la distancia entre las rectas $r$ y $s$ donde

   *a*) $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 0),\ s : (x, y, z) = (3, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$

   *b*) $r = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases},\ s = \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 10 \end{cases}$

5. Hallar la distancia entre la recta $r$ y el punto $P$ siendo

   *a*) $P = (1, 3, 2),\ r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 3, 2)$ *b*) $P = (1, 0, 1),\ s = \begin{cases} y + z = 2 \\ y - z = 10 \end{cases}$

### 5.13.1. Solución a ejercicios seleccionados del Práctico 6.

**Producto escalar y producto vectorial.**

1 Recordar que la norma de un vector $v$ está definida como $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Si $v \in \mathbb{R}^3$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ entonces $||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

   a. $||u|| = \sqrt{54}$, $||v|| = \sqrt{11}$, $\langle u, v\rangle = -20$, $u \wedge v = (-4, 13, 3)$, $||u \wedge v|| = \sqrt{194}$.

   b. $u \wedge (v \wedge w) = (37, -3, -11)$, $(u \wedge v) \wedge w = (29, 11, -9)$.

2 a. Sabemos que $||v||^2 = \langle v, v\rangle$, por lo tanto, tenemos que

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

   donde usamos vale la propiedad distributiva. Además, sabemos que el producto interno es conmutativo, por lo que concluimos que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

   b. Razonando de forma análoga a la parte anterior

$$\langle x + y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, -y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, -y\rangle$$

   Usando ahora la linealidad del producto escalar y el hecho de que es conmutativo, tenemos que

$$\langle x + y, x - y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$$

3 a. El hecho de que $u - v$ es perpendicular a $u$ implica que $\langle u - v, u\rangle = 0$. Utilizando la propiedad distributiva, esto es equivalente a

$$\langle u, v\rangle - ||u^2|| = 0$$

Por lo tanto, $\langle u, v\rangle = 9$.

Por otro lado, $\langle u, v\rangle = ||u||||v||cos(\theta)$ donde $\theta$ es el ángulo que forman $u$ y $v$. De esta parte concluimos que

$$9 = 3||v||\sqrt{3}/2$$

y por lo tanto $||v|| = 3\sqrt{2}$

b. Por un lado tenemos que $\langle u, v\rangle = ||u||||v||cos\pi/4 = 3||v||/\sqrt{2}$ donde $\pi/4$ es el ángulo que forman los vectores $u$ y $v$.

Por otro lado,

$$\langle u + v, u\rangle = ||u + v||||u||cos\pi/6 = ||u + v||3\sqrt{3}/2.$$

pero también se cumple que

$$\langle u + v, u\rangle = ||u||^2 + \langle u, v\rangle$$

A partir de estas dos ecuaciones, tenemos que $3\sqrt{3}/2||u + v|| = 9 + \langle u, v\rangle$.

$||u|| = 3(1 + \sqrt{3})$

c. No es necesario que $u = w$. Se tiene que $u - w$ debe ser ortogonal a $v$

4 a. Si $w \in \mathbb{R}^3$ cumple que $u \wedge w = u \wedge v$, entonces, $u \wedge (w - v) = 0$. Recordar que el producto vectorial de dos vectores es nulo si estos son colineales, es decir, $w - v = \alpha u$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

6 a. Para esta parte alcanza hacer el producto $AA^{-1}$ y ver que da la identidad:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ||u||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||v||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||w||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. La única diferencia con la parte anterior es que ahora no podemos hacer el último paso, por lo tanto, para conseguir unos en la diagonal, podemos tomar la inversa como

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1}{||u||^2} & \frac{v_1}{||v||^2} & \frac{w_1}{||w||^2} \\ \frac{u_2}{||u||^2} & \frac{v_2}{||v||^2} & \frac{w_2}{||w||^2} \\ \frac{u_3}{||u||^2} & \frac{v_3}{||v||^2} & \frac{w_3}{||w||^2} \end{pmatrix}$$

c. Para simplificar las cuentas, podemos asumir que una de las tapas del paralelepípedo está apoyada sobre el plano $z = 0$. Esto equivale a suponer que $u = (u_1, u_2, 0), v = (v_1, v_2, 0)$ y como los vectores son ortogonales, $w = (0, 0, w_3)$.

Recordar que calcular el volumen del paralelepípedo, equivale a calcular el área de la base y luego multiplicar por la altura. Usando el ejercicio 1.5, tenemos que el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es el área del paralelogramo determinado por los vectores $(a_{11}, a_{12}, 0)$ y $(a_{21}, a_{22}, 0)$.
Desarrollando $\det(A)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Es decir, $|\det(A)|$ es el volumen del paralelepípedo.

**Revisitando ecuaciones de rectas y planos.**

1 a. Recordar que la ecuación implícita de un plano es de la forma $ax + by + cz = d$. Por lo visto en el teórico, sabemos que $(a, b, c)$ son las coordenadas de un vector normal al plano. Como sabemos, por letra, que el plano debe ser perpendicular a $(-1, 2, 3)$, la ecuación de éste debe ser de la forma

$$\pi : -x + 2y + 3x = d$$

Para encontrar $d$ usamos que el punto $(-3, 1, 0) \in \pi$, por lo que debe verificar la ecuación anterior y concluimos que la ecuación del plano es $\pi : -x + 2y + 3z = 5$

b. Nuevamente, dado que conocemos la ecuación implícita del plano, tenemos que un vector perpendicular a éste es $N = (1, -1, 3)$. Además, el punto $P_0 = (1, 0, 0)$ verifica la ecuación del plano, por lo tanto, la ecuación del plano es

$$\pi : \langle (x - 1, y, z), (1, -1, 3) \rangle$$

c. De la ecuación implícita tenemos que un vector perpendicular al plano es $N = (2, 1, 0)$. Por lo tanto $n = N/||N|| = (2, 1, 0)/\sqrt{5}$ y $-n$ son versores perpendiculares al plano.

2 Para que dos rectas sean ortogonales, el producto interno de sus vectores directores debe ser nulo. Buscamos entonces vectores directores de cada una de ellas.

Un vector director de la primera recta es $v = (4, -1, 1)$ y uno de la segunda es $w = (1, 2, -2)$. Entonces

$$\langle v, w \rangle = \langle (4, -1, 1), (1, 2, -2) \rangle = 0$$

y concluimos que las rectas efectivamente son ortogonales.

3 a. Para que la rects que buscamos sea perpendicular al plano, alcanza con que tenga el mismo sentido que el vector normal a éste. Teniendo en cuenta que pasa por el punto $(1, 0, 1)$, la ecuación paramétrica de la misma es entonces

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Para pasar a la implícita, despejamos $\lambda$ de una de las ecuaciones y sustituimos en las otras:

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ z - 3y = 1 \end{cases}$$

b. Vamos a buscar la ecuación paramétrica de la recta que llamaremos $r$. Dado que ésta pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, sabemos que será de la forma $\begin{cases} x = -1 + v_1\mu \\ y = 2 + v_2\mu \\ z = -3 + v_3\mu \end{cases}$

Lo que falta es buscar el vector director. Para esto, podemos observar que como $r$ debe ser ortogonal a la recta $\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$

debe estar contenida en un plano $\pi$ cuya normal es el vector directo de esta recta, es decir $\pi : 6x - 2y - 3z = d$. Para saber cuál es el valor de $d$, notar que el punto $(-1, 2, -3) \in \pi$ por lo que debe verificar la ecuación de $\pi$. De acá sacamos que $\pi : 6x - 2y - 3z = -1$ Por último, sabemos existe un valor de $\lambda$ tal que el punto $P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5)$ verifica la ecuación de la recta y por lo tanto la del plano. Sustituyendo, encontramos que este valor es $\lambda = 0$, es decir, el punto $P$ que verifica la ecuación es $(1, -1, 3)$.

Concluimos que la recta $r$ pasa por los puntos $(1, -1, 3)$ y $(-1, 2, -3)$ y por lo tanto su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -3 + 6\lambda \end{cases}$$

c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

**Distancias entre elementos geometricos .**

1 a. $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{4}{\sqrt{3}}$

b. $(\pi_1, \pi_2) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

2 a. $d(\pi, P) = \frac{8}{\sqrt{3}}$

b. $d(\pi, P) = 2$

3 a. $d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $d(r, s) = \frac{\sqrt{229}}{\sqrt{7}}$

4 a. $d(r, P) = \sqrt{\frac{3}{7}}$

b. $d(s, P) = \sqrt{61}$

Revisar en el teórico los procedimientos o fórmulas para el cálculo de las distancias que se piden