Propiedades algebraicas del límite

Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

Supongamos además que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

Entonces:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2} \qquad (I)$$

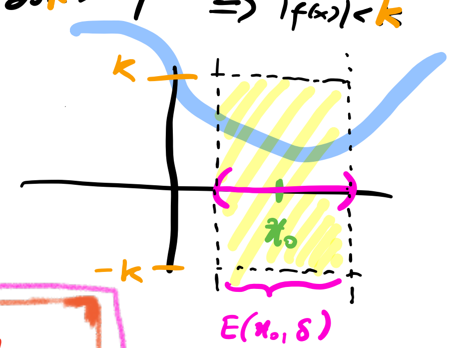
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2} \qquad (II)$$

$$\boxed{\text{Si además, } L_2 \neq 0; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{L_1}{L_2}}$$

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ y f acotada en un entorno de x_0 $\Big\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = 0$

(*) Decimos que f está acotada en un entorno de x_0

Si $\exists \delta > 0$, $\exists k > 0$ / Si $x \in E(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| < k$



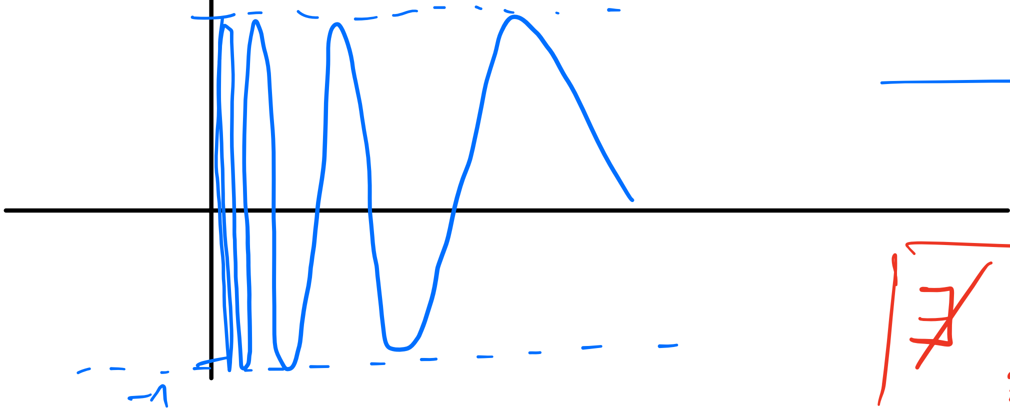
- La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada en un entorno de x_0

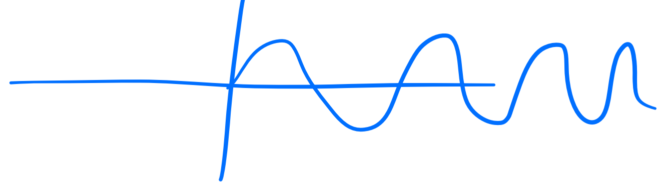
Ejemplo de "límite de acotado × 0 = 0"

$$f(x) = \operatorname{sen}(1/x) \qquad (x \neq 0)$$

f esta acotada porque $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$





$$\boxed{\nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)}$$

$$g(x) = x \quad ; \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

Por el resultado previo "acotado $\times$ 0 = 0"

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to 0} \overset{0}{x} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(1/x)}_{\text{acotado}} = 0$$

LÍMITE DE LA SUMA = SUMA LÍMITES

Demostración: Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

Queremos ver que $\lim_{x \to x_0} (f+g)x = L_1 + L_2$

Tenemos que ver que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 /$ si $x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) \in E(L_1 + L_2, \varepsilon)$

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\exists \; \delta_\varepsilon^{(1)} > 0 /$

si $x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^{(1)}) \Longrightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon)$

Como $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, $\exists \; \delta_\varepsilon^{(2)} > 0 /$

$x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^{(2)}) \Longrightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon)$

Definimos $\delta_\varepsilon := \min \{ \delta_\varepsilon^{(1)}, \delta_\varepsilon^{(2)} \}$

Entonces, si $x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon) \Longrightarrow$

$x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^{(1)}) \Longrightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon) \Rightarrow L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon$

$x \in E^*(x_0, \delta_\varepsilon^{(1)}) \Longrightarrow f(x) \in E(L_1, \varepsilon) \Rightarrow L_2 - \varepsilon < g(x) < L_2 + \varepsilon$

$\Longrightarrow (L_1 + L_2) - 2\varepsilon < (f+g)(x) < (L_1 + L_2) + 2\varepsilon$

Es decir, $(f+g)(x) \in E(L_1 + L_2, 2\varepsilon)$

Propiedades algebraicas de funciones continuas

Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas

Entonces $f+g$ es continua (I)

$f \cdot g$ es continua (II)

f/g es continua en $\{x \in I : g(x) \neq 0\}$

Veamos la prueba de (I)

Queremos ver que $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0) \quad \forall x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

PORQUE f y g SON CONT. EN x_0

$$= (f+g)(x_0)$$

Entonces $(f+g)$ continua en x_0 $\forall x_0 \in I$.

Ejemplo: Los polinomios son funciones continuas

$$f(x) = 3x^3 + 2x - 3$$

- $3x^3$ es continua por ser producto de x y la función constante 3
- Por el mismo motivo, $2x$ es continua

Entonces f es continua por ser suma de funciones continuas.

Límite y continuidad de la compuesta

$(f \circ g)$

$$x_0 \xrightarrow{g} y_0 \xrightarrow{f} f(y_0)$$

- $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$; f continua en y_0 $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f \circ g) = f(y_0)$

$$x_0 \xrightarrow{g} g(x_0) \xrightarrow{f} f(g(x_0))$$

- Si g continua en x_0 y f continua en $g(x_0)$

  $\Rightarrow (f \circ g)$ es continua en x_0

- Composición de funciones continuas es continua

Asumiremos de ahora en más que sen, cos son continuas.

Entonces $\text{sen}(3x^2 - 4x + 1)$ es una función continua.

$f(x) = \text{sen}(x)$

$g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

Entonces, como f y g son continuas,

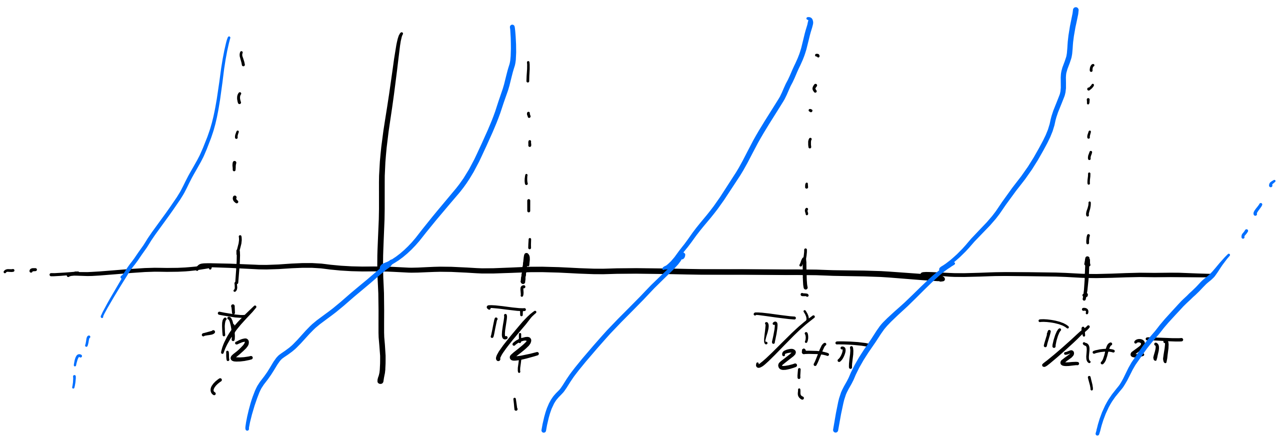
concluimos que $f(g(x)) = \operatorname{sen}(3x^2 - 4x + 1)$ es continua.

La función $tg(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$tg : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$

RAICES DE COSENO

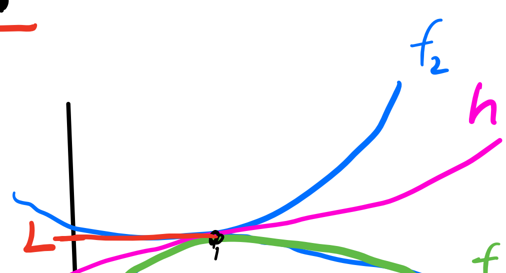
La función tg, en su dominio es continua por ser cociente de funciones continua.



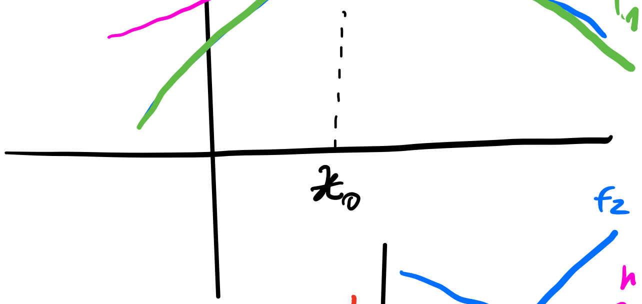
El TEOREMA DEL SANDWICH

Sean $f_1, f_2, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$;

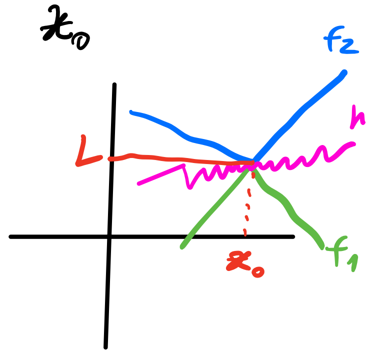
asumamos que



$$f_1(x) \le h(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in I$$



y $$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L$$



Entonces $$\lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Ejemplo:

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f_1(x) = -x$

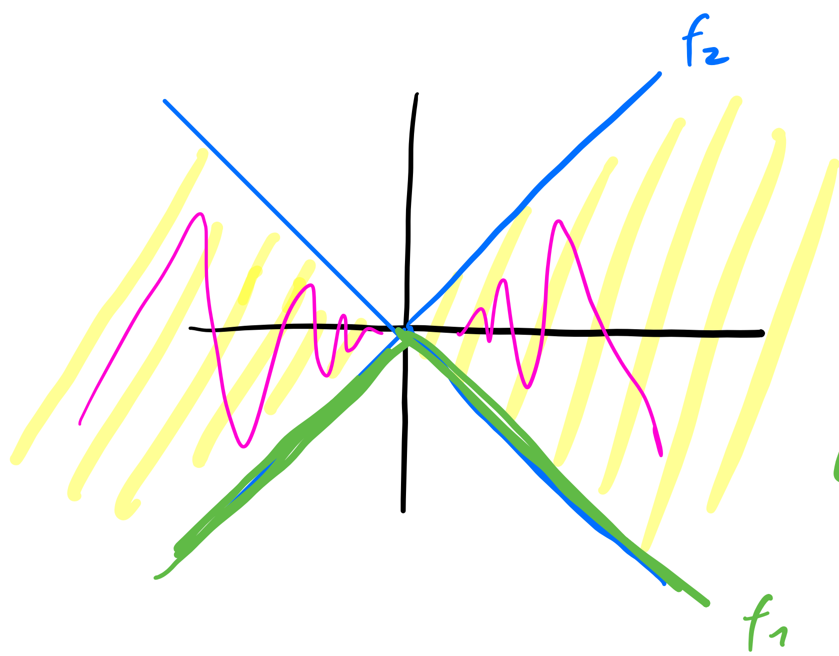
$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f_2(x) = x$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad h(x) = x \,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$-1 \le \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) \le 1$$

$$-x \le x \cdot \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) \le x \qquad (x > 0)$$

$$+x \le x \cdot \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) \le -x \qquad (x < 0)$$



Concluimos que

$$\boxed{\underbrace{-|x|}_{f_1} \le \underbrace{x \cdot \mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{h} \le \underbrace{|x|}_{f_2}}$$

Como $\lim_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim_{x\to 0} |x|$

y h $\boxed{\text{"está ensanguchada"}}$

El Teorema del Sandwich dice que

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$