- **Matriz fundamental**: $\left[X' = AX \text{ con } A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).\right]$

Una matriz fund para esta ec lineal es una matriz $n\times n$, que llamamos $\Psi(t)$, tal que toda soluc al sig problema:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0)) = X_0 \end{cases}$$

se puede escribir como $\Psi(t)\cdot X_0$

(observar que si $X_0 = (1, \dots, 0) \to \Psi(t)\cdot X_0 =$ Primer columna de $\Psi(t)$ (corresp. a la soluc con cond inicial $(1, 0 \dots 0)$))

- En el caso $n=1$, $\Psi(t)$ es una función real: $\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \to x(t) = e^{at}\cdot x_0$

En este caso $\Psi(t) = e^{at}$

- En el caso $n=2$ con $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$

La solución a este sistema (desacoplado) es

$$(x(t), y(t)) = \left(e^{\lambda_1 t}\cdot x_0,\ e^{\lambda_2 t}\cdot y_0\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^{At}$

- Caso $n=2$ con $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$: $\begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = (\lambda x, x + \lambda y) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$

La soluc a este sistema es

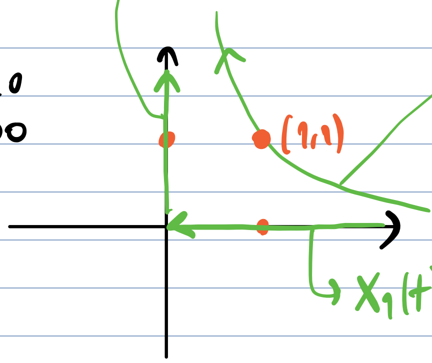
$$(x(t), y(t)) = \left(e^{\lambda t}\cdot x_0,\ e^{\lambda t}\cdot y_0 + e^{\lambda t}\cdot t\cdot x_0\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ e^{\lambda t}\cdot t & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\Psi(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ e^{\lambda t}\cdot t & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{e^{At}} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$

$(e^{\lambda t}, e^{\lambda t}\, t)$ es la soluc. con cond. inicial $(1, 0)$.

$X_2(t) = (0, e^{\lambda_2 t})$

Caso diagonal $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$



• **Obs/ejercicio**: Con esto se prueba que el espacio vect. de soluc de la ecuación $X' = AX$ con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es exactamente n.

¿Cómo calcular la matriz fund. del sistema en un caso general?

La matriz fund. resulta ser la matriz exponencial de At.

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $e^A = Id + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_0^\infty \frac{A^i}{i!}$

• **Prop**: La matriz fund de $X' = AX$ es $\varphi(t) = e^{At}$.

Es decir, la soluc al problema $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ es $X(t) = e^{At} \cdot X_0$.

• **Prop**: Si $A = P^{-1} \cdot B P$, $e^A = P^{-1} \cdot e^B P$.

Por ej:

10) b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ (¿e^A?)

• **Vap**: $(-\lambda)(4-\lambda) + 4 = -4\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4. = (\lambda - 2)^2$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.4}}{2} = 2$$

Buscamos vaps: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-2x + 2y, -2x + 2y) = (0,0)$

Sii $x=y$.

Sabemos entonces que A es semejante a | como $\dim(\ker A - 2Id) = 1$ |

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$[P = (w \; v_\lambda)$ donde $Aw = \lambda w + v_\lambda]$

Por lo tanto, si P es la matriz cambio de base para Jordan

entonces $PBP^{-1} = A$ y $e^A = Pe^B P^{-1}$

donde e^B es uno de los casos conocidos

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\exp} e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix} \right)$$

* Si A tiene vaps complejos entonces A es semejante a una matriz B del tipo $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Si P es la matriz cambio de base $\Rightarrow$ $e^A = P e^B P^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longrightarrow e^B = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\mathrm{sen}(b) \\ \mathrm{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$$