Práctico 4

1. **Método iterativo de Picard**

   Consideramos la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$. Observar que si (t_0, x_0) pertenece al dominio Ω de f, encontrar una solución al problema con condición inicial $x(t_0) = x_0$ es equivalente a encontrar una función $x(t)$ definida en un entorno de t_0 que satisfaga

   $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

   Dada una función $y(t)$ cualquiera definida en un entorno de t_0 definimos $T(y) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$. Es decir, x es solución al problema de Cauchy con condición inicial x_0 si y solo si $T(x) = x$.

   a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideramos la siguiente sucesión por recurrencia

   $$x_0 = 0, \ x_n = g(x_{n-1})$$

   Probar que si $x_n \to x_\infty$ entonces x_∞ es un punto fijo para g, es decir $g(x_\infty) = x_\infty$.
   Esta idea cambiando sucesiones de reales por funciones y la función g por T es la que sigue el método iterativo de Picard: Dada y_0 función constante $y_0(t) = x_0$ definida en $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, definimos por recurrencia la sucesión de funciones $y_n = T(y_{n-1})$. Si la sucesión tiene límite y_∞, entonces y_∞ es solución de la ecuación con condición inicial x_0 pues $T(y_\infty) = y_\infty$.

   b) Considerar el problema

   $$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

   Escribir el resultado de las primeras iteraciones del método de Picard, corroborar que tienen límite y que éste corresponde a la (única) solución del problema de Cauchy.

2. Consideramos $F(t,x)$ función definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Probar que si F es de clase C^1 entonces es localmente Lipschitz según la variable espacial $x \in \mathbb{R}^n$. Sin embargo una función puede ser localmente Lipschitz y no derivable. Mostrar que esto último ocurre con la función $f(t,x) = t + |x|$

3. Probar que existe más de una solución para la ecuación:

   $$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

   ¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

4. Para las siguientes ecuaciones

   $$a) \ \ \dot{x} = x^2 - 1 \quad b) \ \ \dot{x} = \frac{1}{t^2 - 1} \quad c) \ \ \dot{x} = x^2 \cos t$$

   hallar, en función de la condición inicial (t_0, x_0), el intervalo más grande donde está definida la solución correspondiente. Representar gráficamente dichas soluciones.

5. Sean f_1 y f_2 dos funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f_1(t,x) \leqslant f_2(t,x)$. Llamemos $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ a una solución de la ecuación $\dot{x} = f_1(t,x)$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_2(t,x)$, y supongamos que existe $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.

   Demostrar que $\varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \bigcap I_2$ mayor que t_0. ¿Qué ocurre si $t < t_0$?

6. Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que las soluciones de la ecuación $\dot{x} = t^2 + x^2$ están definidas en un intervalo acotado.

7. Sea la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1$ con $x(0) = x_0$. Probar, usando salida de compactos, que toda solución maximal con $|x_0| < 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

8. Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(t + x)$.

   a) Buscar soluciones de la forma $x(t) = at + b$.

   b) Probar, usando salida de compactos, que todas las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$.

   c) Hallar el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.

   d) A partir de las partes anteriores, realice un bosquejo del gráfico de las soluciones maximales para distintas condiciones iniciales.

9. **(Parcial 2003)** Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = e^{x^2}$ en la recta real $\mathbb{R}$.

   a) Probar que $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una solución si y solo si la función $\psi(t) = -\varphi(-t)$ definida en $(-b,-a)$ también es solución.

   b) Deducir que la solución maximal $\varphi_0(t)$ para la condición inicial $x(0) = 0$ está definida sobre un intervalo simétrico.

   c) Comparando con la ecuación $\dot{x} = x^2$, deducir que dicho intervalo es un intervalo acotado de la forma $(-a,a)$ y que $\varphi_0 : (-a,a) \to \mathbb{R}$ es biyectiva.

   d) Demostrar que la solución maximal para una condición inicial arbitraria (t_0, x_0) es la función

   $$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi_0(t - t_0 + \varphi_0^{-1}(x_0))$$

   que está definida en el intervalo

   $$(t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) - a, t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) + a).$$

10. Estudiaremos ahora cualitativamente la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$.

    a) Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.

    b) Demostrar que para toda solución $\varphi = \varphi(t)$ existe $T \geqslant 0$ (que depende de φ) tal que $\varphi(t) < t^{1/2}$ para todo $t > T$.

    c) Para cada $c \in \mathbb{R}$, sea φ_c la solución maximal que verifica $\varphi_c(0) = c$. Probar las siguientes afirmaciones:

    1) Si $c \geqslant 0$ entonces φ_c está definida para todo $t > 0$.
    2) Existe $k < 0$ tal que para todo $c < k$ la solución φ_c tiende a $-\infty$ en tiempo finito.
    3) Existe un único valor c_0 tal que φ_{c_0} está definida para todo $t > 0$ y

    $$\lim_{t \to +\infty} (\varphi_{c_0}(t) + t^{1/2}) = 0.$$

11. Se considera la ecuación diferencial definida por

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1) \\ \dot{y} = y(y-1) \end{cases}$$

a) Determinar dominio de la ecuación diferencial.

b) Estudiar existencia y unicidad del problema de Cauchy (es decir la ecuación acompañada de una condicion inicial.

c) Bosquejar el diagrama de fase.

d) Investigar todo lo posible los intervalos maximales de definición de las soluciones.

e) Estudiar esabilidad de los puntos de equilibrio.

f) Las respectivas linealizaciones, ¿permiten conlusiones del sistema no lineal?

12. Se considera la ecuación diferencial definida por

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -z^3 \end{cases}$$

Estudiar todo lo pedido en el ejercicio anterior.