

MD1-2S 2024. Solución del EVA-test número 1

Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia

septiembre 2024

Presentamos para cada ejercicio la solución de una de las versiones. Técnicamente todas las versiones son equivalentes y les invitamos a resolver las otras siguiendo los lineamientos de la presente solución.

1. En un mazo de naipes español hay 48 cartas, repartidas en 4 palos (bastos, copas, espadas y oros) de 12 cartas cada uno, numeradas del 1 al 12. ¿De cuántas formas se pueden extraer 6 cartas de modo que al menos hayan 4 cartas del mismo palo?

Solución: Consideramos las siguientes etapas de construcción de las soluciones del problema:

- (a) Elegir el palo del que habrán al menos 4 cartas.
- (b) Elegir las cartas de ese palo que integrarán la elección de 6 cartas.
- (c) Completar las 6 (si es necesario) con cartas de los otros 3 palos.

Dos formas diferentes de ejecutar estos pasos dan lugar a dos elecciones diferentes de las 6 cartas, de modo que basta con contar de cuántas formas se pueden ejecutar secuencialmente (aplicando la regla del producto).

- (a) Para la elección del palo inicial hay 4 posibilidades.
- (b) Para la elección de las al menos 4 cartas de ese palo, se presentan 3 casos disjuntos: exactamente 4 de ese palo, exactamente 5 de ese palo o exactamente 6 de ese palo. Aplicando la regla de la suma, para este paso tenemos $C_4^{12} + C_5^{12} + C_6^{12}$.
- (c) Para la elección de las cartas de los otros 3 palos se presentan diferentes casos, según el caso del paso anterior en el que nos encontremos: C_2^{36} si hay exactamente 4 del palo elegido al comienzo, C_1^{36} si hay exactamente 5 del palo elegido al comienzo y C_0^{12} si hay exactamente 6 del palo elegido al comienzo.

$$\begin{aligned} \text{Juntando todo tenemos: } & 4 \times \left(C_4^{12} \cdot C_2^{36} + C_5^{12} \cdot C_1^{36} + C_6^{12} \cdot \underbrace{C_0^{36}}_{=1} \right) = \\ & 4 \times \left(C_4^{12} \cdot C_2^{36} + C_5^{12} \cdot C_1^{36} + C_6^{12} \right) \end{aligned}$$

2. Se desea distribuir 380 g de ración entre 5 gatos, de modo que cada gato coma al menos 70 g. ¿De cuántas formas se puede distribuir la ración de modo que cada gato reciba una cantidad entera* de gramos de ración?

* Esto es, no se considera la posibilidad de fraccionar gramos. Por ejemplo, un gato no ha de recibir 82,5 g.

Solución: Es un típico problema de distribuciones. Empezamos por dar 70g de ración a cada uno de los 5 gatos, de modo que usamos 350g solamente para satisfacer la cuota mínima de 70g/gato. Luego nos quedan 30g más para distribuir entre los 5 gatos de todas las formas posibles. Eso se calcula como combinaciones con repetición, es decir: $CR(5, 30) = C_4^{34}$.