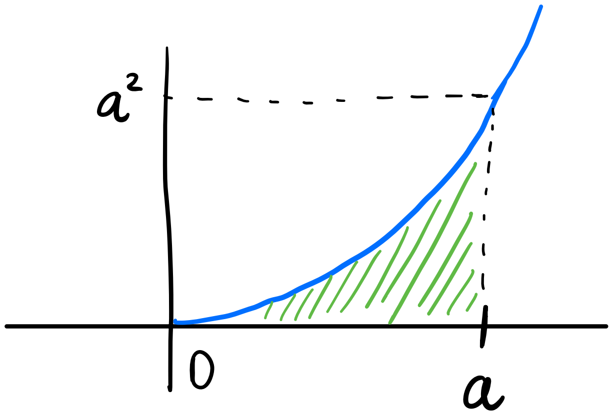
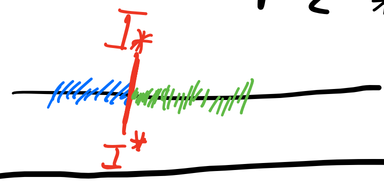


$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$$

Recordamos:

$I_*(f) = \sup \{ S_*(f,P) : P$ partición de $[a,b] \}$



Criterio de la integral

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada.

Entonces, son equivalentes:

1. f es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ tales que

$$\alpha - \varepsilon < S_*(f,P) \leq S^*(f,P) < \alpha + \varepsilon$$

2 $\Rightarrow$ 1   Queremos ver que $I_*(f) = I^*(f) = \alpha$

En otras palabras, f es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$

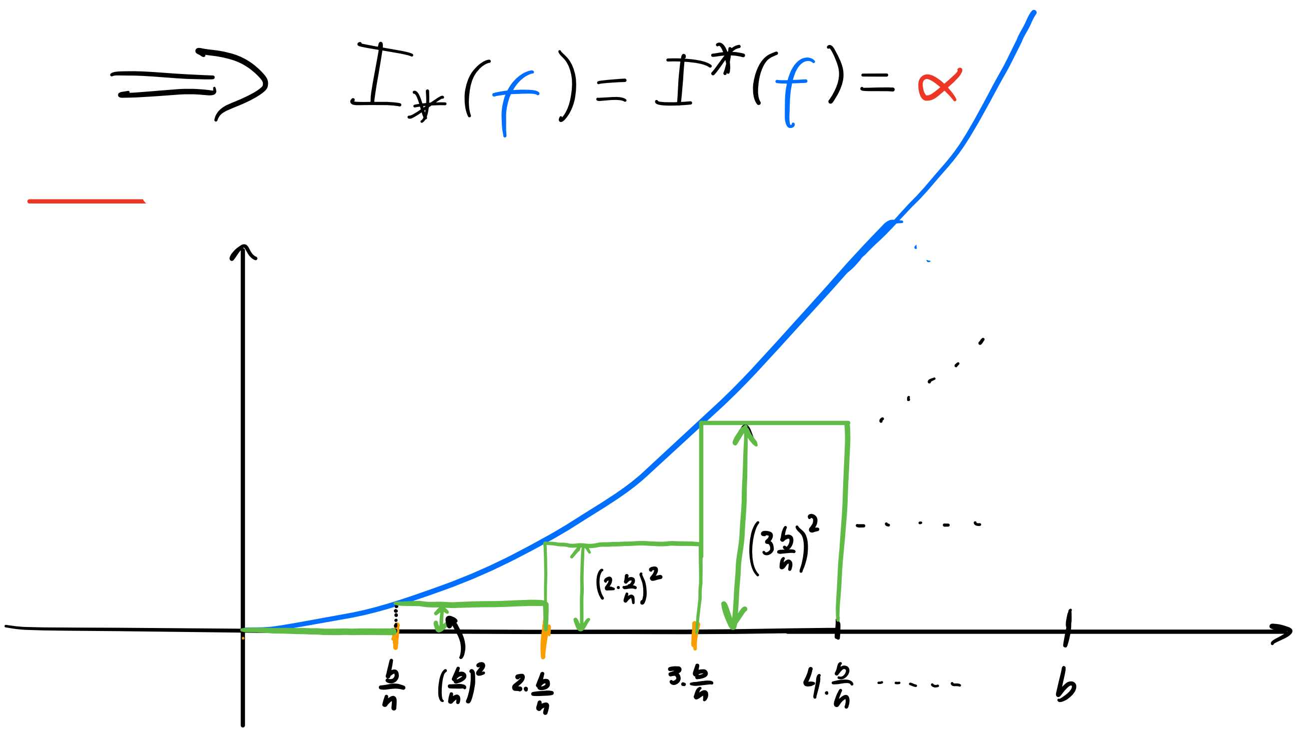
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$ partición de $[a,b]$ tal que

$$\boxed{\alpha - \varepsilon} < S_*(f,P) \leq \boxed{I_*(f)} \leq \boxed{I^*(f)} \leq S^*(f,P) < \boxed{\alpha + \varepsilon}$$

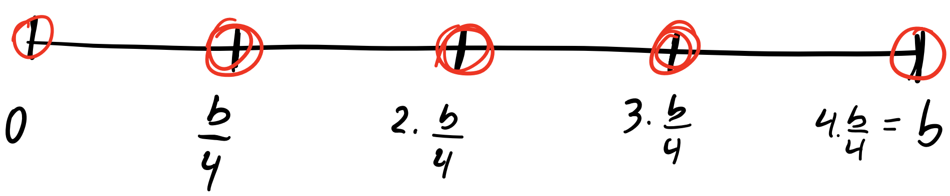
$I_*(f) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$

$I^*(f) \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \quad I_*(f) = I^*(f) = \alpha$



P_n es la equipartición del intervalo $[0,b]$ en n sub-intervalos iguales.



$P_n = \{0\frac{b}{n}, 1\frac{b}{n}, 2\frac{b}{n}, 3\frac{b}{n}, \ldots\ldots, (n-1)\frac{b}{n}, n\frac{b}{n} = b\}$

$S_*(x^2, P_4) = \left(0\frac{b}{4}\right)^2\frac{b}{4} + \left(1\frac{b}{4}\right)^2 \cdot \frac{b}{4} + \left(2\cdot\frac{b}{4}\right)^2\frac{b}{4} + \left(3\frac{b}{4}\right)^2 \cdot \frac{b}{4} =$

$= \left(\frac{b}{4}\right)^3 \left(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2\right)$

$$S_*(x^2, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf\left(f, \left[i\frac{b}{n}, (i+1)\frac{b}{n}\right]\right)\underbrace{\left((i+1)\frac{b}{n} - i\frac{b}{n}\right)}_{b/n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(i\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \boxed{\left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(\sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)}$$

Porque x^2 es monótona creciente

Vamos a usar la siguiente identidad que se prueba por inducción completa

Análogamente,

$$S^*(x^2, P_n) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}$$

$$S_*(x^2, P_n) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(\sum_{i=0}^{n-1} i^2\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - n^2\right)}_{\sum_{i=0}^{n-1} i^2} =$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - n^2\right) =$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) =$$

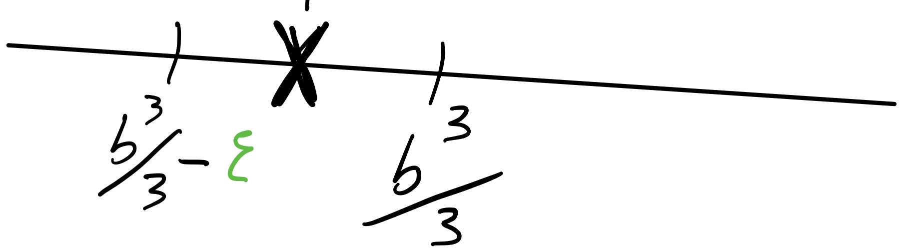
$$= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} - \frac{b^3}{n^3} \frac{n^2}{2} + \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n}{6} =$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}$$

cuando el n se va haciendo grande $S_*(x^2, P_n)$ se va acercando a $\frac{b^3}{3}$.

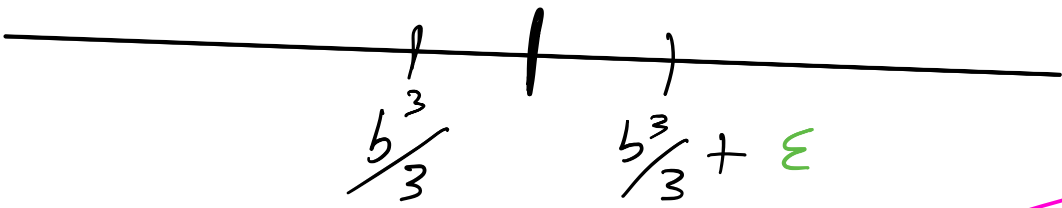
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_n$ tal que

$$S_*(x^2, P_n) > \frac{b^3}{3} - \varepsilon$$



Repitiendo cuentas análogas podemos ver que

$$\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists P_m \text{ tal que } S^*(x^2, P_m) < \frac{b^3}{3}+\varepsilon}$$



Tomar como k el máximo de m y n

Entonces, $\forall \varepsilon>0,\ \exists P_k$ /

$$\frac{b^3}{3}-\varepsilon < S_*(x^2, P_k) \leq S^*(x^2, P_k) < \frac{b^3}{3}+\varepsilon$$

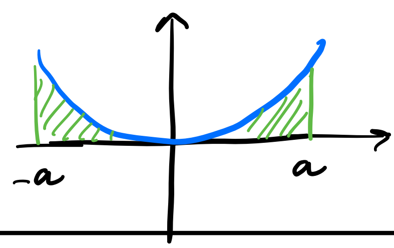
Entonces por el criterio de la integral Tenemos que

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}}$$

Como x^2 es una función par $\left(x^2=(-x)^2\right)$

se puede ver que

$$\int_{-a}^{0} x^2\,dx = \int_0^a x^2\,dx \quad \forall a>0$$



Entonces $\displaystyle\int_0^{-a} x^2\,dx = -\int_{-a}^{0} x^2\,dx = -\left(\int_0^{a} x^2\,dx\right) = -\left(\frac{a^3}{3}\right) =$

$$= \frac{(-a)^3}{3}$$

Por lo tanto, la formula $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$ es cierta $\forall b \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \int_a^0 x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx = -\int_0^a x^2\,dx + \int_0^b x^2\,dx =$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

VALE $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, sin importar los signos de a y b, ni tampoco si $a < b$, $a = b$, o $b < a$.

Entonces

$$\boxed{\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}$$