Ecuaciones dif lineales: $\dot{X} = AX$

(por ej si $X = (x,y)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$)

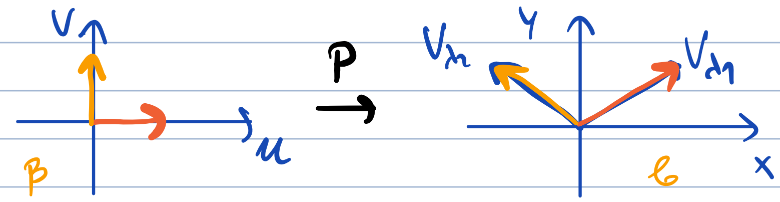
- **Caso A diagonal:** $\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = dy \end{cases} \rightarrow (x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{dt})$

- **Caso A diagonalizable** ($P^{-1}AP = D$ con D = diagonal)

Recordamos que si λ_1, λ_2 vaps de A, V_{λ_1} y V_{λ_2} vect propios asociados, entonces tomando $P = \begin{pmatrix} V_{\lambda_1} & V_{\lambda_2} \end{pmatrix}$ tenemos $\underset{\beta\ \beta\quad \beta\ \beta}{P^{-1}AP} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D}$ *

- $\{e_1, e_2\} \xrightarrow{P} \{V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}\}$

base canónica en coord u, v — expresada en base canónica



Para resolver ec dif considero el cambio de variable $P^{-1}x$, resuelvo en estas variables y deshago el cambio de variable

- $Y = P^{-1}X \longrightarrow \dot{Y} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}AX = \underbrace{P^{-1}AP}_{D}Y = DY.$

*
$$\boxed{\begin{aligned} P^{-1}AP(e_1) &= P^{-1}AV_{\lambda_1} = P^{-1}\lambda_1 V_{\lambda_1} \\ &= \lambda_1 P^{-1}V_{\lambda_1} = \lambda_1 e_1 \end{aligned}}$$

Ejercicio 2a)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} \rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Para resolver:
1) Encontrar vaps. (en este caso obtengo dos vaps distintos)
2) Encontrar vect propios y con ellos construyo P
3) Resolver la ecuación con el cambio de variable ($\dot{y} = Dy$)
4) Deshacer cambio de variable.

1) Polinom. caract es $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)$

raíces son $4, 1$. Vaps $= \{1, 4\}$.

2) · Vector propio asoc a 1 : Resolvemos $A(x,y) = (x,y)$ $\left(\text{equiv } (A - Id)(x,y) = (0,0) \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sii} \quad x = y.$$

Tomamos por ej $V_1 = (1,1)$

· Vector propio asoc a 4 : Resolvemos $(A - 4Id)(x,y) = (0,0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y \\ -2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sii} \quad 2x = -y$$

Tomamos por ej $V_4 = (1,-2)$

Por lo tanto $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (P manda base canónica en base formada por V_1, V_4)

3) Resuelvo $\dot{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot Y$.

Si escribimos $Y(t) = (u(t), v(t)) \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = 4v \end{cases}$

Las soluciones son
$$Y(t) = (u(t), v(t)) = (e^{t} \cdot u_0 , e^{4t} \cdot v_0)$$

4) Recordamos que $Y(t) = P^{-1} X(t) \Rightarrow X(t) = P\, Y(t)$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \left(u(t) + v(t) , u(t) - 2v(t) \right)$$

$$= \left(e^{t} u_0 + e^{4t} v_0 , e^{t} u_0 - 2e^{4t} v_0 \right)$$

- En particular $(x_0, y_0) = X(0) = (u_0 + v_0 , u_0 - 2v_0) = P(u_0, v_0)$

entonces $(u_0, v_0) = P^{-1}(x_0, y_0)$.

En matrices cuadradas 2x2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc}$

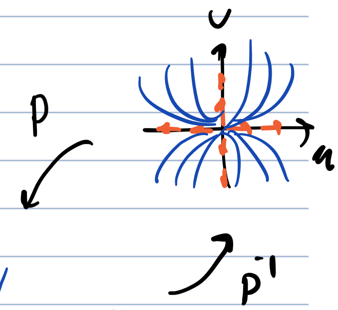
• Si $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-3}$

$\Rightarrow (u_0,v_0) = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\left(-2x_0-y_0,\ -x_0+y_0\right)$

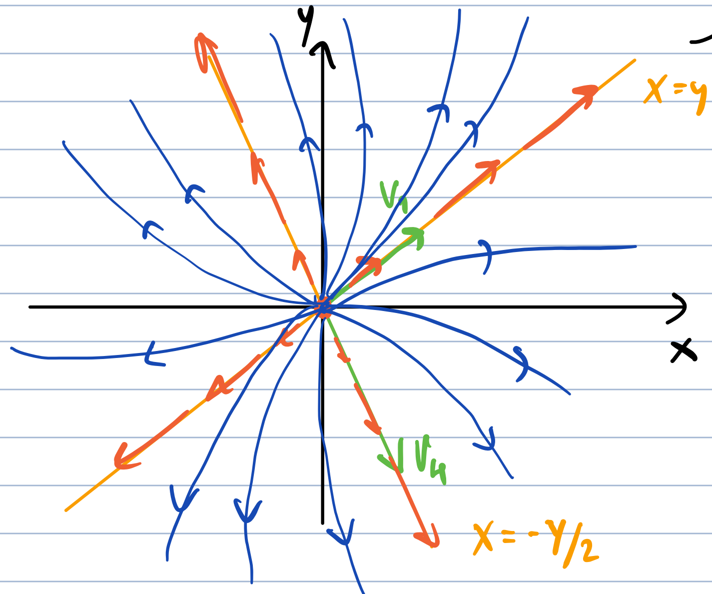
Si $(x_0,y_0)=(1,1) \Rightarrow (u_0,v_0) = -\frac{1}{3}(-3,0) = (1,0)$

Para esta condición inicial, la solución es

$(x(t),y(t)) = (e^{t}, e^{t})$



Dibujo de diagrama de fase:



En verde base de vect propios

En azul algunas órbitas.

Ejercicio 3d).

$\cancel{\begin{cases}\dot x = -x+y\\ \dot y = -y\end{cases}} \to \cancel{A=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}}$

(equiv al problema $\boxed{\begin{cases}\dot x = -x\\ \dot y = x-y\end{cases}}$, $A=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$)

trabajamos este caso

$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}\\ \dot y = x_0 e^{-t} - y\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-t}\\ y(t) = y_0 e^{-t} + x_0 t e^{-t}\end{cases}$

En general, si $A=\begin{pmatrix}\alpha&0\\1&\alpha\end{pmatrix} \rightarrow \dot X = AX$ tiene como solución

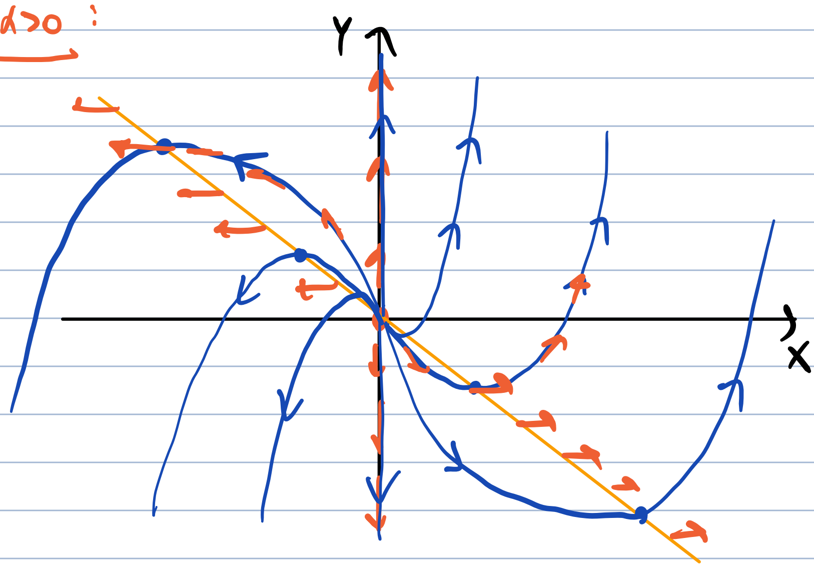
$(x(t),y(t)) = \left(x_0 e^{\alpha t},\ y_0 e^{\alpha t} + t x_0 e^{\alpha t}\right)$.

• Recordamos que si λ vap, se define $\begin{cases} m.a(\lambda) = \text{mult como raíz del pol caract.} \\ m.g(\lambda) = \dim(\ker(A-\lambda Id)) \end{cases}$

• Si A matriz 2x2 y $ma(\lambda) > mg(\lambda)$ → A es semejante a una matriz de Jordan de la forma $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Diagrama de fase para $\dot{X} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} . X$

Sup $\alpha > 0$:



Observar que $(0,1)$ es vector propio asociado al vap α.

$^*(x(t), y(t)) = (x_0 e^{\alpha t}, (y_0 + t x_0) e^{\alpha t})$

obs: si $x_0 = 0$, la soluc es $(0, y_0 e^{\alpha t})$.

$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

$\dot{y} = 0$ sii $y = \frac{x}{-\alpha}$

* de acá pueden despejar $y(x)$ de forma de obtener ecuación de las curvas azules