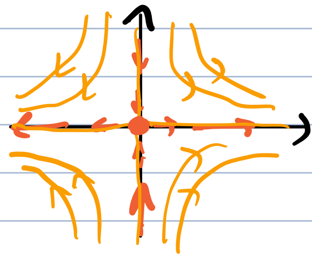
Ecuaciones lineales en varias variables.

Recordamos: Cuando tenemos ec autónoma $(\dot{x},\dot{y}) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

podemos resumir mucha info del sistema en un diagrama de fase.

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$



$$(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,-y).$$

Vamos a estudiar sist de ecuaciones dados por la expresión

$(\dot{x},\dot{y}) = A\,(x,y)$ con A matriz 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = ax+by \\ \dot{y} = cx+dy \end{cases} \longrightarrow (\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5) $$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = \alpha y \end{cases} \longrightarrow (\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

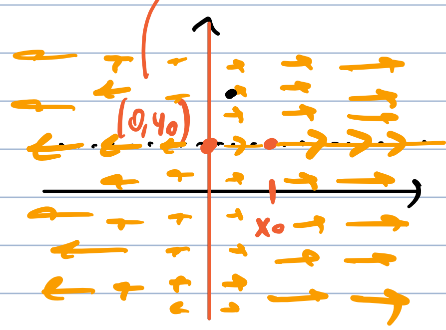
Solución del sistema

$$\boxed{(x(t),y(t)) = (x_0 e^{t}, y_0 e^{\alpha t})}$$

Distinguimos tres casos:
- I $\alpha = 0$
- II $\alpha > 0$.
- III $\alpha < 0$.

$(x(t),y(t)) = (\underbrace{0}_{0}e^{t}, y_0)$

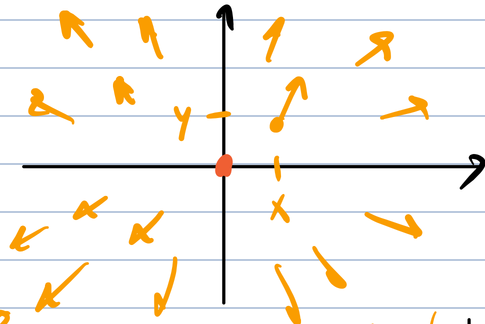
I
- En este caso y es cte
- Diagrama de fase $\longrightarrow$



Flechas del campo $F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

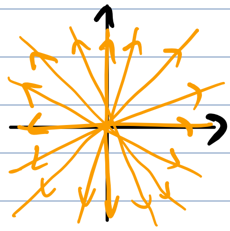
$= (x, 0)$

II $(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ con $\alpha > 0$

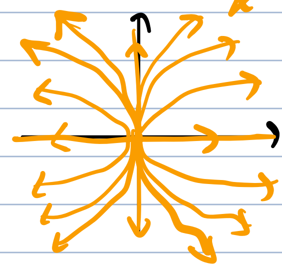


$F(x,y) = A(x,y) = (x, \alpha y)$

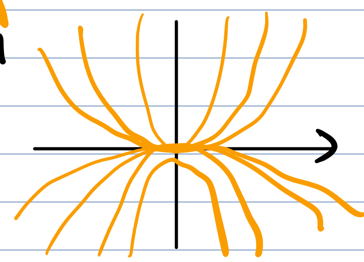
$\alpha = 1$



$\alpha \in (0,1)$



$\alpha > 1$

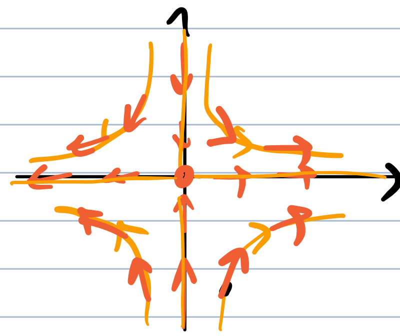


Tenemos explícitamente la ecuación de estas curvas:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{t} \\ y(t) &= y_0 e^{\alpha t} \end{aligned} \longrightarrow \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} \cdot y_0 = y\right]$$

III $(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ con $\alpha < 0$

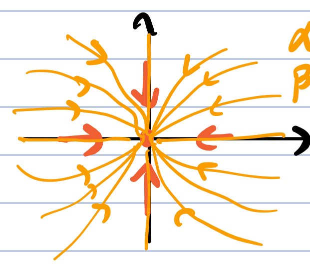
$F(x,y) = (x, \alpha y)$



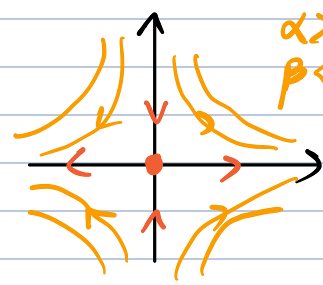
$F(x,y) = (\alpha x, \beta y)$

Obs: En gral, si $(\dot{x},\dot{y}) = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

alcanza con saber los signos de α y β para determinar el tipo de comportamiento y la estabilidad del pto de equilibrio



$\alpha < 0$
$\beta < 0$



$\alpha > 0$
$\beta < 0$

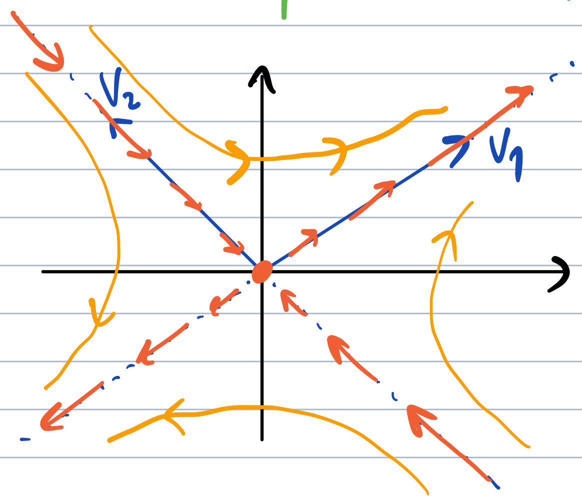
- Sabemos estudiar $(\dot{x},\dot{y}) = A(x,y)$ con A diagonal.

¿Qué pasa si A no es diagonal pero sí diagonalizable?

Mismo comportamiento apoyado en una base de vect. propios.

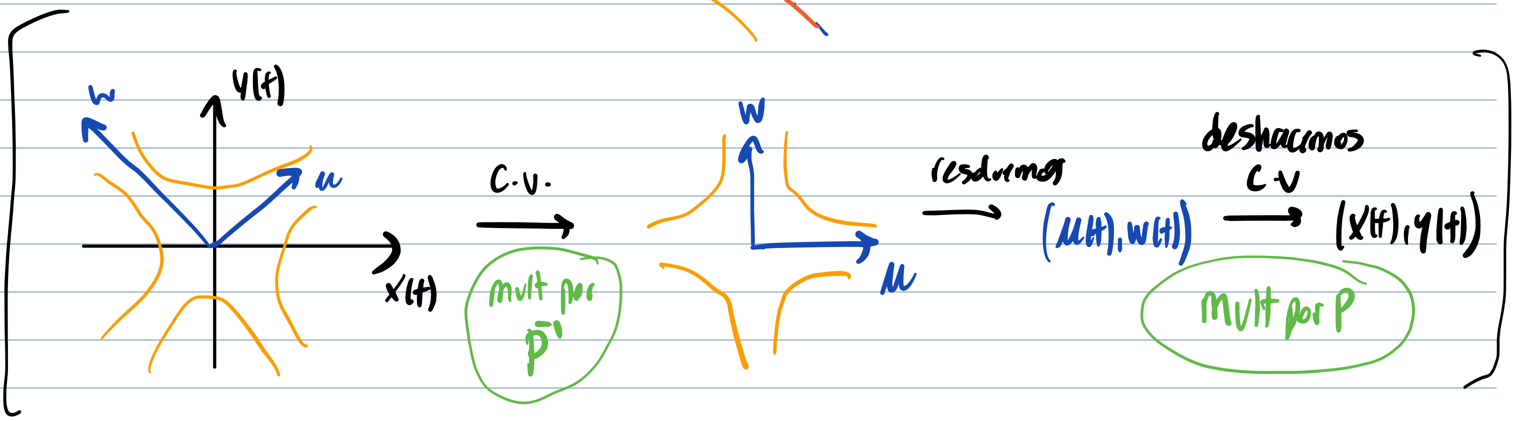
Recordamos v es vect propio de A si $Av = \lambda v$ para cierto λ.

Decimos que λ es el val. propio asociado al vect. propio



$\lambda_1 > 0$ vap de V_1

$\lambda_2 < 0$ vap de V_2



Seguimos recordando GAL 2 :

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- ¿Cómo calcular vaps? $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$

$$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

Las raíces de $P(\lambda)$ son los vaps de A.

- ¿Cómo hallo vect propio V_λ asoc. a λ?

Si λ_1 es una raíz de $P(\lambda)$, buscamos resolver la ec $A.V = \lambda_1 V$

equiv a $A \cdot v - \lambda v = 0$ equiv a $(A - \lambda Id)v = 0$, $v = (x,y)$

$$\left[\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

- Sean V_1 y V_2 vect propios de A, l.i (conforman una base)

$V_1 = (V_{1_x}, V_{1_y})$, $V_2 = (V_{2_x}, V_{2_y})$

Consideramos $P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{pmatrix}$

P es una T. lineal que manda la base $\{e_1, e_2\} \longrightarrow \{V_1, V_2\}$
{coord base β} {coord canónicas $\mathcal{E}$}

$$P(1,0) = \begin{pmatrix} \sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{1x} \\ V_{1y} \end{pmatrix} = V_1$$

$$P(0,1) = \begin{pmatrix} V_{1x} & V_{2x} \\ V_{1y} & V_{2y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{2x} \\ V_{2y} \end{pmatrix} = V_2$$

P es lo que llamamos matriz cambio de base $\left({}_{\mathcal{E}}[Id]_{\beta} \right)$

$$(x(t), y(t)) = (\sim, \sim) = P(u(t), v(t)) = P(u_0 e^{\lambda_1 t}, v_0 e^{\lambda_2 t})$$

$${}_{\mathcal{E}}A_{\mathcal{E}} = {}_{\mathcal{E}}[Id]_{\beta} \, {}_{\beta}D_{\beta} \, {}_{\beta}[Id]_{\mathcal{E}} = PDP^{-1}$$

Clase que viene arranco con 2a).