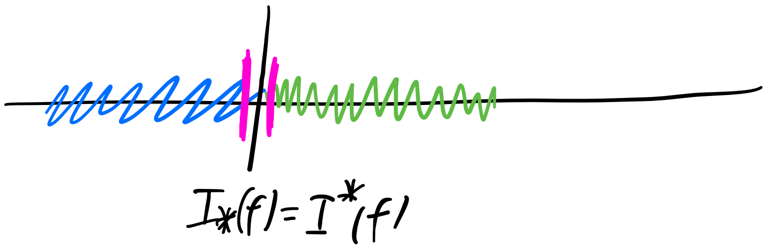
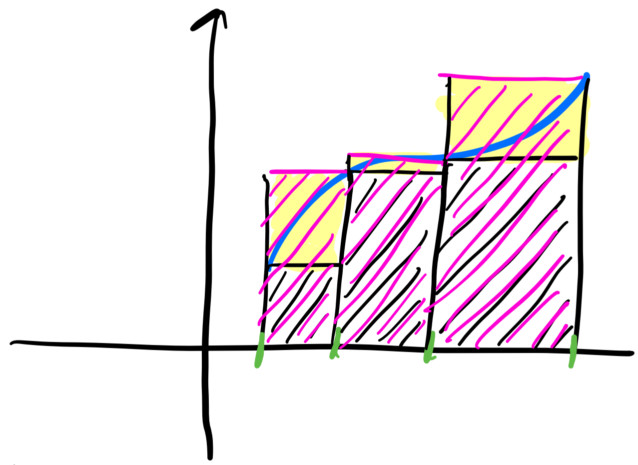
Criterio de Integrabilidad

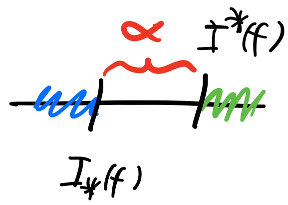
Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada.

Entonces: f es integrable $\left(I_*(f)=I^*(f)\right)$ $\iff$ $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, P$ part. de $[a,b]$ tal que $S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$





Dem $\Leftarrow$: Supongamos por absurdo que f no es integrable. Entonces $I_*(f)\neq I^*(f)$.

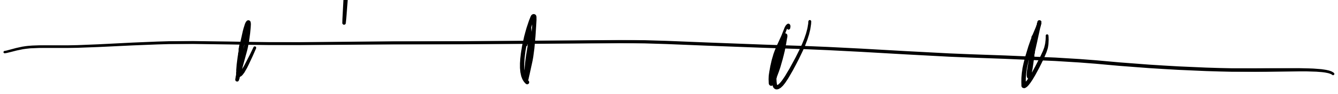


Entonces $I^*(f)-I_*(f)=\alpha>0$

Por hipótesis, tomando $\varepsilon=\alpha$, podemos encontrar una partición P de $[a,b]$ tal que

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\alpha$$

Pero tenemos que



$$S_*(f,P)\le I_*(f)\le I^*(f)\le S^*(f,P)$$

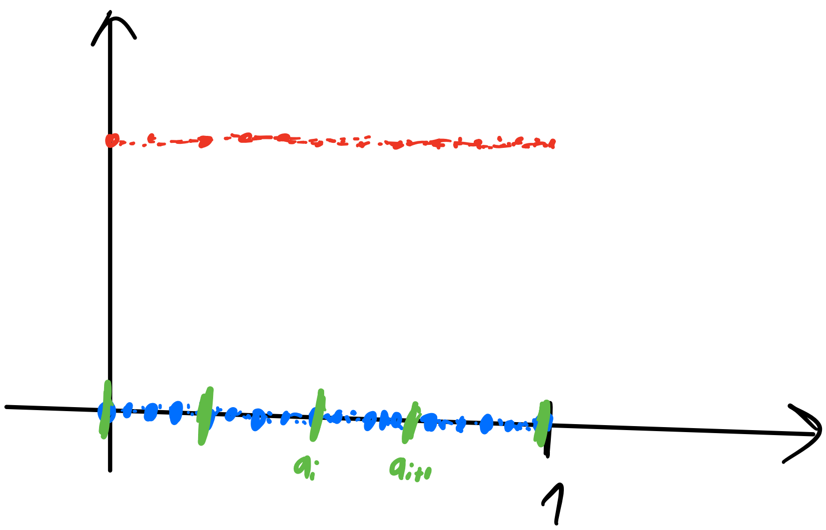
Esto es absurdo porque

$$I^*(f) - I_*(f) \le S^*(f,P) - S_*(f,P) < \alpha$$

Ejemplo de Dirichlet (Una función NO integrable)

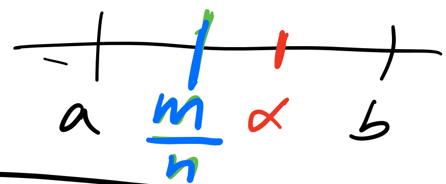
$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Propiedad de densidad de los racionales y de los irracionales

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ $\exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \,/\, a < \frac{m}{n} < b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \,/\, a < b$ $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,/\, a < \alpha < b$



Sea $P = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$ partición

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\inf(f,[a_i,a_{i+1}])}^{0} (a_{i+1} - a_i) = 0$$

$$\inf(f,[a_i,a_{i+1}]) = \inf \{ f(x) : x \in [a_i, a_{i+1}] \} =$$

$$= \inf \{0, 1\} = 0$$

Por la prop de densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \overbrace{\sup(f,[a_i,a_{i+1}])}^{1}(a_{i+1}-a_i) =$$

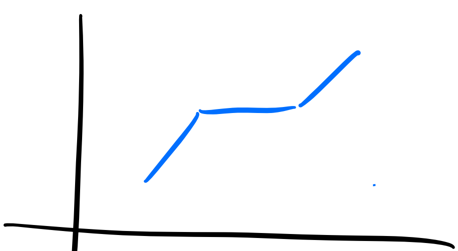
$$= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i) = 1$$

Entonces $S^*(f,P) - S_*(f,P) = 1 \quad \forall P$ partición de $[0,1]$

Por lo tanto, por el criterio integral, concluimos que f <u>no</u> es integrable.

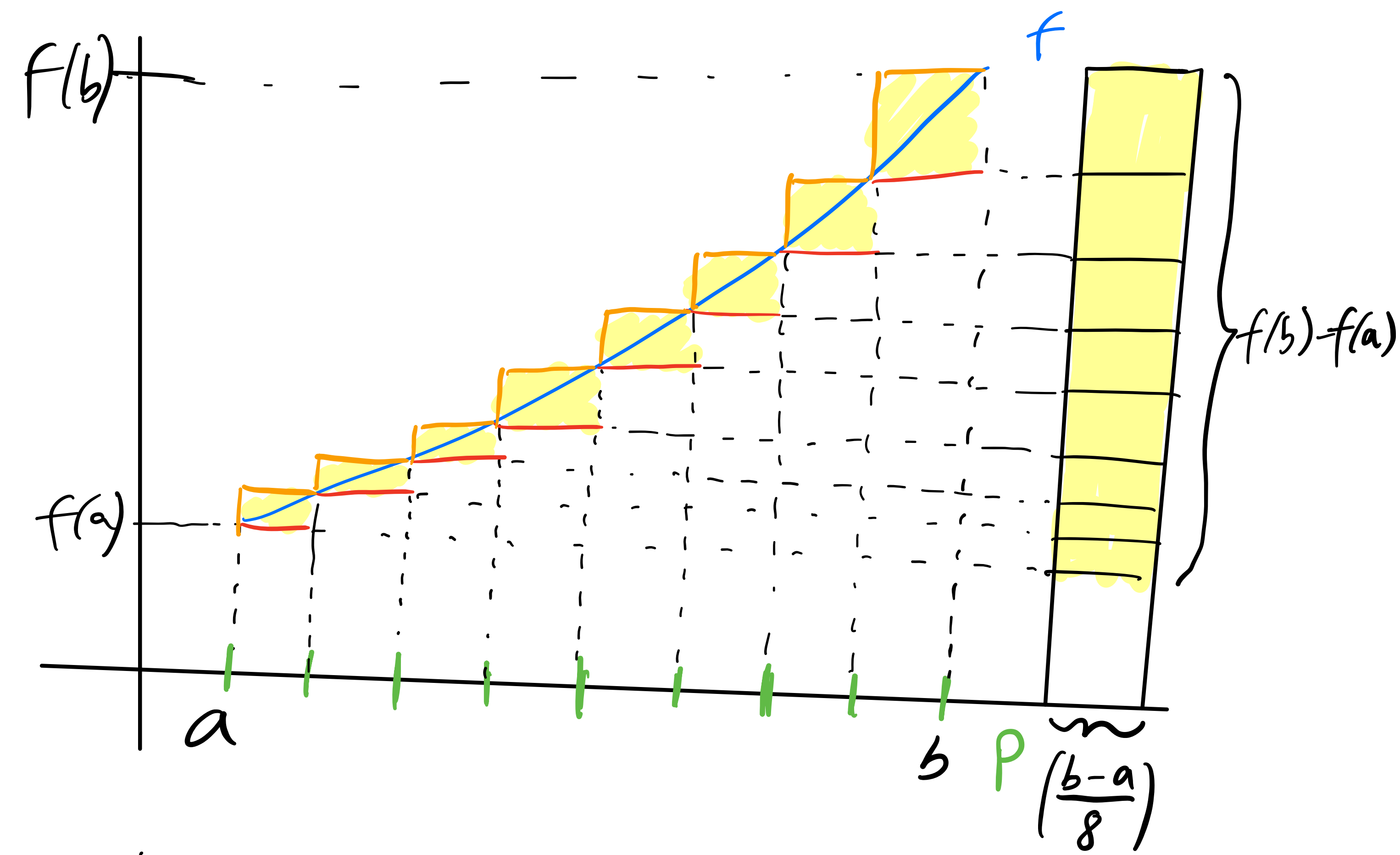
Integrabilidad de las funciones monótonas

<u>Recordamos</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es monótona creciente (decreciente) si $\forall x,y\in[a,b] \,/\, x<y$; se tiene que $f(x)\le f(y)$ $(\geq)$



<u>Teorema</u>

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función monótona creciente (o decreciente). Entonces f es integrable.



$$S^*(f,P) - S_*(f,P) = \frac{b-a}{8}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)$$

Dem: Supongamos que f es monótona creciente, la prueba en el caso en que f es monótona decreciente es igual.

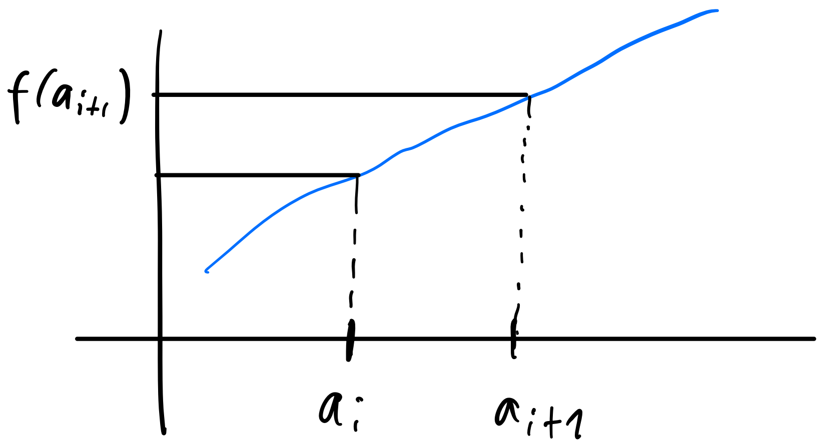
Sea P_n la equipartición del intervalo $[a,b]$ en n sub-intervalos iguales

$$P_n = \left\{a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\left(\frac{b-a}{n}\right),\ \dots,\ a+(n-1)\frac{b-a}{n},\ \underbrace{a+\cancel{n}\cdot\frac{b-a}{\cancel{n}}}_{=\,b}\right\}$$

$$S^*(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup(f,[a_i,a_{i+1}])(a_{i+1}-a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) \frac{(b-a)}{n}$$

$$\underbrace{\sup(f,[a_i,a_{i+1}]) = f(a_{i+1})} \; ; \; \underbrace{\inf(f,[a_i,a_{i+1}]) = f(a_i)}$$

PORQUE f ES MONÓTONA CRECIENTE



Análogamente:

$$S_*(f,P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf(f,[a_i,a_{i+1}])(a_{i+1}-a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\frac{b-a}{n}$$

$$S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})\frac{(b-a)}{n}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\right)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big(\big(\cancel{f(a_1)} + \cancel{f(a_2)} + \cdots + \cancel{f(a_{n-1})} + f(a_n)\big) - \big(f(a_0) + \cancel{f(a_1)} + \cancel{f(a_2)} + \cdots$$

$$\left(\left(f(a_0)+\cancel{f(a_1)}+\cancel{f(a_2)}+\dots\dots+\cancel{f(a_{n-1})}\right)\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\Big(f(\underbrace{a_n}_{b})-f(\underbrace{a_0}_{a})\Big)=\boxed{\frac{b-a}{n}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)}$$

Para probar que f es integrable, usamos el criterio integral. Para esto, $\forall\,\varepsilon>0$ alcanza con encontrar una partición P_n tal que $S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)<\varepsilon$

Es decir, queremos hallar n para que

$$S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)=\boxed{\frac{(b-a)}{n}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon}$$

Ahora, $\frac{b-a}{n}\big(f(b)-f(a)\big)<\varepsilon \iff \boxed{\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}<n}$ $(*)$

Luego, tomando un n que verifique $(*)$ obtenemos que $S^*(f,P_n)-S_*(f,P_n)<\varepsilon$.

Como $\varepsilon>0$ es genérico, el criterio de integrabilidad asegura que f es integrable.

OpenFing CDIV 2022
clase 14, pueden volver a

ver la prueba