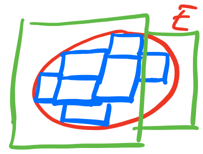
Proposición: Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

↳ $\mathrm{Im}(f)$ es acotada

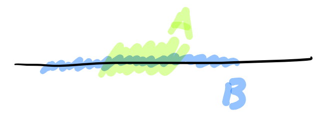
y P, Q particiones de $[a,b]$.



Entonces $S_*(f,P) \le S^*(f,Q)$

Antes de probar la proposición vamos a enunciar.

Lema: Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos tales que $A \subseteq B$ y B está acotado.



Entonces $\inf(B) \le \inf(A) \le \sup(A) \le \sup(B)$

También vamos a precisar otra Proposición:

Proposición:

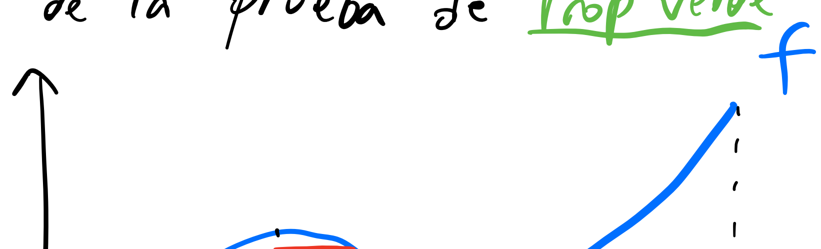
Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

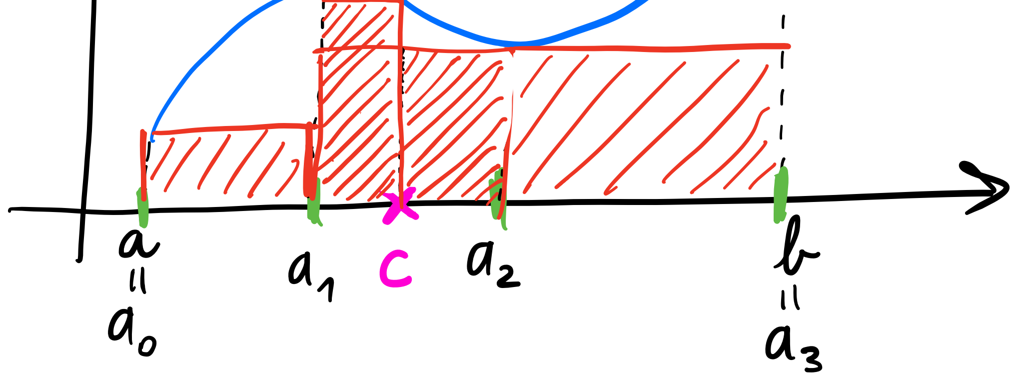
y P, Q particiones de $[a,b]$ / $P \subseteq Q$

Entonces $S_*(f,P) \le S_*(f,Q) \le S^*(f,Q) \le S^*(f,P)$

"particiones con más elementos dan aproximaciones mejores"

Idea de la prueba de Prop verde





$P = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$

$$S_*(f,P) = \inf(f,[a_0,a_1])(a_1-a_0) + \inf(f,[a_1,a_2])(a_2-a_1) + \inf(f,[a_2,a_3])(a_3-a_2)$$

$Q = \{a_0, a_1, c, a_2, a_3\}$

¿Cómo es el aporte a la suma inferior de el intervalo $[a_1,a_2]$ para $S_*(f,P)$ y $S_*(f,Q)$?

Para $S_*(f,P)$ aporta $\inf(f,[a_1,a_2]) \cdot (a_2-a_1)$

$S_*(f,Q)$ aporta : $\inf(f,[a_1,c])(c-a_1) + \inf(f,[c,a_2])(a_2-c)$

$$\boxed{\inf(f,[a_1,a_2])(a_2-a_1) = \inf(f,[a_1,a_2])(c-a_1) + \inf(f,[a_1,a_2])(a_2-c)}$$

Observar
$$\inf(f,[a_1,a_2]) = \inf\{f(x) : x \in [a_1,a_2]\}$$
$$\inf(f,[a_1,c]) = \inf\{f(x) : x \in [a_1,c]\}$$

Como $\{f(x): x\in[a_1,c]\} \subseteq \{f(x): x\in[a_1,a_2]\}$ el Lema nos dice:

$$\underbrace{\inf\{f(x): x\in[a_1,a_2]\}} \le \underbrace{\inf\{f(x); x\in[a_1,c]\}}$$

$$\inf(f,[a_1,a_2]) \le \inf(f,[a_1,c]) \quad (*)$$

De (*) se deduce:

$$\inf(f,[a_1,a_2])(c-a_1) \le \inf(f,[a_1,c])(c-a_1)$$

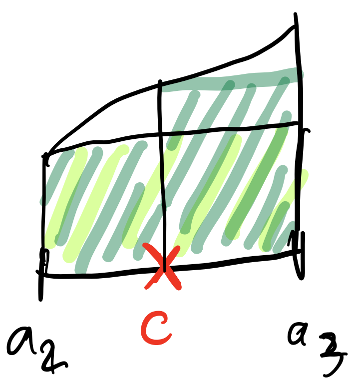
También podemos deducir:

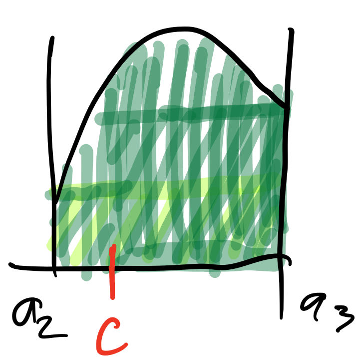
$$\inf(f,[a_1,a_2])(a_2-c) \le \inf(f,[c,a])(a_2-c)$$

Sumando obtenemos:

$$\underbrace{\inf(f,[a_1,a_2])\big((c-a_1)+(a_2-c)\big)}_{\shortparallel} \le \inf(f,[a_1,c])(c-a_1) + \inf(f,[c,a_2])(a_2-c)$$

$$\boxed{\inf(f,[a_1,a_2])(a_2-a_1)}$$





Esto termina de dar una

idea de porqué al agrandar la partición "mejora la aproximación"

↳ se agranda la suma inferior
se achica la suma superior

Demostración de la Prop Roja:

P, Q particiones

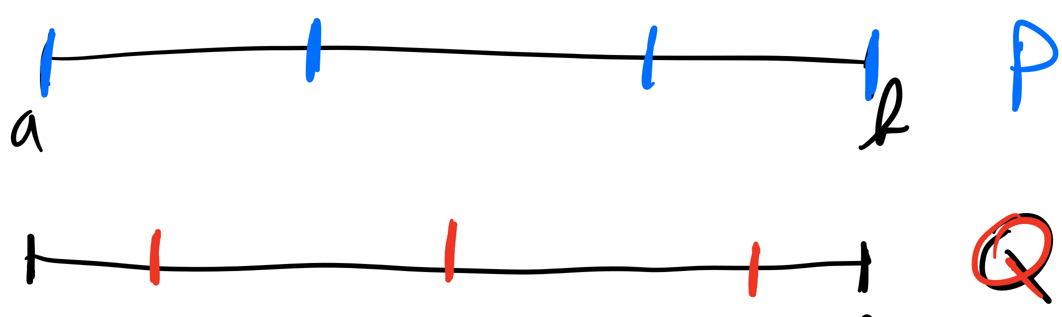
$$S^*(f,P) \geq S_*(f,P)$$

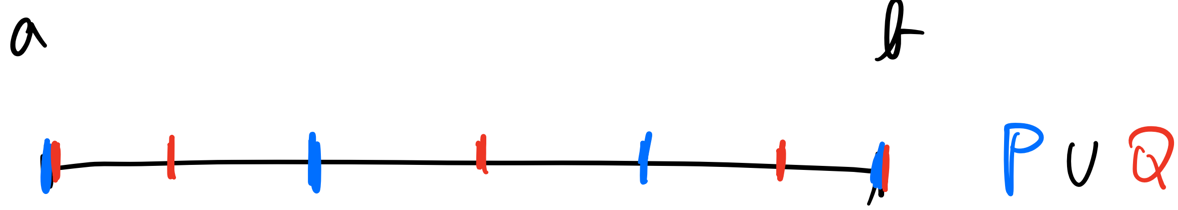
$$S_*(f,P) \leq S_*(f,P\cup Q) \leq S^*(f,P\cup Q) \leq S^*(f,Q)$$

$$S^*(f,Q) \geq S_*(f,Q)$$

POR LA PROP VERDE

Consideremos la partición $P\cup Q$





<u>Por la prop verde</u>

$$S_*(f,P) \le S_*(f,P\cup Q) \le S^*(f,P\cup Q) \le S^*(f,Q)$$

Entonces: $$\boxed{S_*(f,P) \le S^*(f,Q)}$$

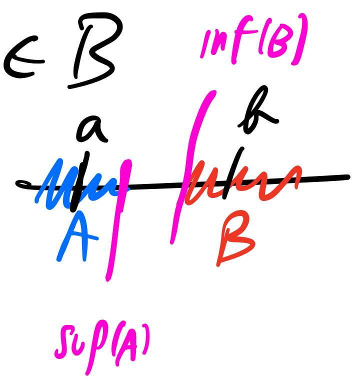
Recordemos: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada

$$\mathcal{S}_*(f) = \{S_*(f,P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$$

$$\mathcal{S}^*(f) = \{S^*(f,P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$$

<u>Lema</u>: $a\le b \quad \forall a\in A, \ \forall b\in B$

$$\Rightarrow \sup(A)\le \inf(B)$$



Observar que $a\le b$ $\left.\begin{array}{l} \forall a\in \mathcal{S}_*(f) \\ \forall b\in \mathcal{S}^*(f) \end{array}\right\}$ Prop Roja

$\Rightarrow$ Por el Lema $\underbrace{\sup \mathcal{A}_*(f)}_{\text{Integral inferior}} \leq \underbrace{\inf \mathcal{A}^*(f)}_{\text{Integral superior}}$

La integral inferior la denotamos $I_*(f)$

La integral superior la denotamos $I^*(f)$

Acabamos de ver que $I_*(f) \leq I^*(f)$

Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada es integrable (Riemann) si

$$I_*(f) = I^*(f)$$

En este caso, definimos la integral de f como este valor.

A este número lo vamos a denotar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$