- $A = \left\{ \frac{m}{n} : 0 < m < n, \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$

$\sup(A) = 1$

Se puede ver que $A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : 0 < \frac{m}{n} < 1 \right\}$

¿ Cómo podemos probar que $1 = \sup(A)$, $0 = \inf(A)$?

- $B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$; $1 \notin B$

$1 - \frac{1}{1} = 0$

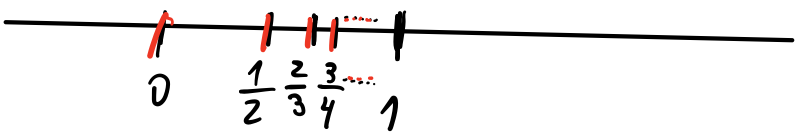
$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\vdots$

$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

$\vdots$



¿ Cómo podemos probar que $\sup(B) = 1$?

Propiedad Fundamental del supremo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío y $\alpha \in \mathbb{R}$ una cota de A.

α es el supremo de A $\iff$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists a_\varepsilon \in A \ / \ \alpha - \varepsilon \leq a_\varepsilon \leq \alpha}$

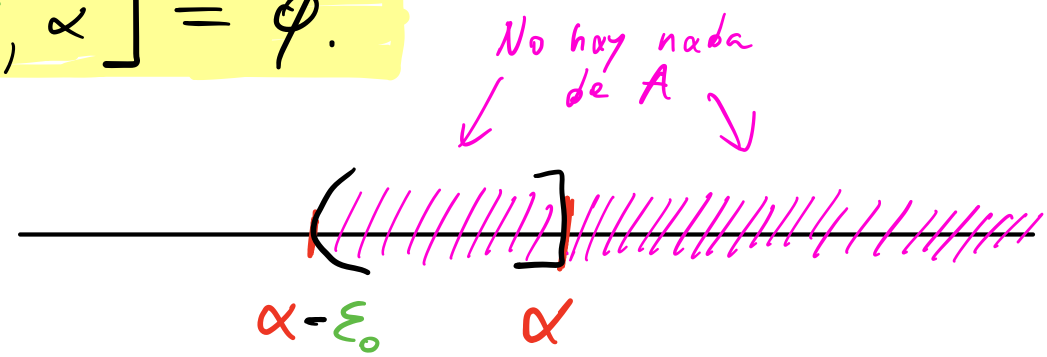
Otra manera: $\forall \varepsilon > 0$, $A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha] \neq \emptyset$

$A \cap (\alpha-\varepsilon, \alpha] \neq \phi$

($\Rightarrow$) Sea α el supremo de A.

Supongamos por absurdo que $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ /

$A \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha] = \phi$.



Por otro lado, como α es el supremo de A, α es una cota superior de A. Esto implica que $(\alpha, +\infty) \cap A = \phi$

Juntando lo anterior obtenemos que

$$A \cap (\alpha - \varepsilon_0, +\infty) = \phi$$

Esto implica que $\alpha - \varepsilon_0$ es una cota superior de A, lo cual contradice que α sea supremo (porque el supremo es la menor cota superior)

llegando a una contradicción.

Entonces, nuestra suposición es falsa, por lo que deducimos que

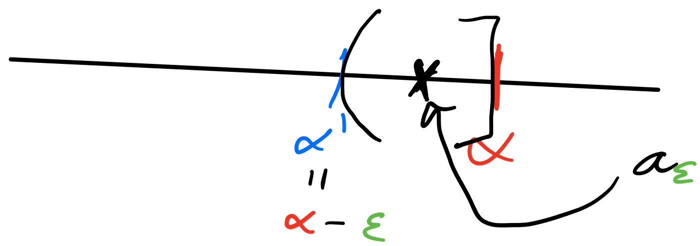
$$\forall \varepsilon>0,\ A\cap(\alpha-\varepsilon,\alpha]\neq\emptyset$$

($\Leftarrow$) Tenemos $\alpha\in\mathbb{R}$ cota superior de A y suponemos que

$$\forall \varepsilon>0,\ (\alpha-\varepsilon,\alpha]\cap A\neq\emptyset.$$

Queremos ver que en este caso, α es el supremo de A.

Supongamos por absurdo que α no es el supremo de A. Entonces, existe $\alpha'<\alpha$ una cota superior de A.



Tomemos $\varepsilon=\alpha-\alpha'$

Entonces $\boxed{\alpha'=\alpha-\varepsilon}$

Por hipótesis, $\exists\, a_\varepsilon\in A \ / \ \alpha-\varepsilon<a_\varepsilon\leq\alpha$.

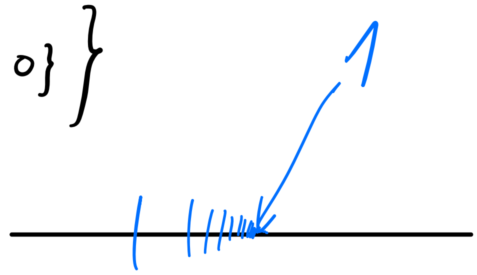
Esto implica que $\underbrace{\alpha-\varepsilon}_{=\alpha'}$ no es cota superior de A.

Esto es una contradicción, lo que implica que nuestra suposición es falsa. Concluimos entonces que α es el supremo de A.

Ejemplo:

Sea $A=\left\{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$

Probemos que $\sup(A)=1$



Supremo de A

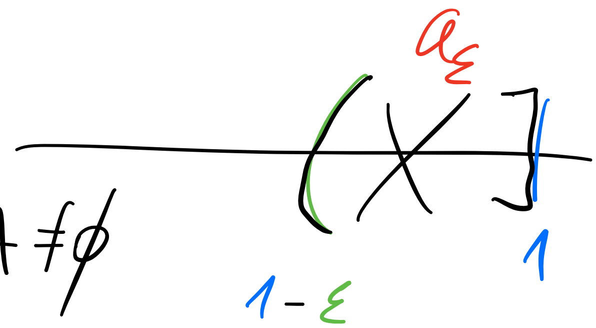
$$-\frac{1}{n} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \Longrightarrow$$ 1 es cota superior de A

Para probar que la cota superior 1 es el supremo vamos a usar "la vuelta" de la ($\Leftarrow$)

Prop. fundamental del supremo.

Es decir, tenemos que ver que $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que $[1-\varepsilon, 1] \cap A \neq \emptyset$



Esto último es lo mismo que pedir que $\exists N \in \mathbb{N} \,/\, 1-\frac{1}{N} \in [1-\varepsilon, 1]$

Para esto, N debe cumplir

$$1-\varepsilon < 1-\frac{1}{N} \iff -\varepsilon < -\frac{1}{N}$$

$$\iff \varepsilon > \frac{1}{N} \iff \boxed{\frac{1}{\varepsilon} < N}$$

Entonces, como ε es arbitrario, concluimos que $[1-\varepsilon, 1] \cap A \neq \emptyset$

lo que implica, por la vuelta de la Prop. Fund. del supremo, que 1 es el supremo de A.