Filosofía: La transformada de Laplace es un mecanismo para identificar funciones reales con otras en las que las operaciones como "derivar" se simplifican, de forma que el problema de resolver una ecuación diferencial se pueda volver un problema algebraico, "de despeje".

$$\begin{array}{ccc} & \text{Transf Laplace} & \\ f(t),\ t\in[0,+\infty) & \longrightarrow & F(s),\ s\in[a,+\infty) \\ f'(t) & \longrightarrow & sF(s)-f(0) \\ f''(t) & \longrightarrow & s^2F(s)-sf(0)-f'(0) \\ a \text{ cte} & \longrightarrow & \frac{a}{s} \end{array}$$

Por ejemplo, la ecuación $f''(t)+f'(t)+2f(t)=1$

se transforma en la ecuación $s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+sF(s)-f(0)+2F(s)=\frac{1}{s}$

→ despejando: $F(s)\,(s^2+s+2)=\frac{1}{s}+sf(0)+f'(0)+f(0)$

$$\left[\ F(s)=\frac{1/s+sf(0)+f'(0)+f(0)}{s^2+s+2}\ \right]$$

Sabiendo "antitransformar" podemos averiguar cuál f verifica $f\xmapsto{\mathcal{L}}F$.

Ahora a formalizar.

Def: Sea $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial $(|f(t)|\le M.e^{at})$

definimos la transformada de Laplace de f como

$$\boxed{\mathcal{L}[f](s):=\int_0^{+\infty}f(t)\,e^{-st}\,dt}\qquad \left(\ f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F(s)=\mathcal{L}([f])(s)\right)$$

Por comodidad voy a escribir $F(s)$ a la transf. de Laplace de $f(t)$ [en lugar de $\mathcal{L}[f](s)$].

• **Obs**: Si $|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \Rightarrow F(s)$ definida en $[\alpha, +\infty)$

(pues dado $s \in (\alpha, +\infty)$, $|F(s)| = \left|\int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} \leq \int_0^{\infty} M e^{\overbrace{+(\alpha - s)}^{<0}} < \infty$.

• **Propiedades elementales**:

(I) **$\mathcal{L}$ es lineal**, es decir $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$

(o en la otra notación $\boxed{\alpha f + \beta g \xrightarrow{\mathcal{L}} \alpha F + \beta G}$)

(II) **$\mathcal{L}$ transforma la operación "derivar" en "multiplicar por s"**:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0) \qquad \boxed{f'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0)}$$

Prueba:

$\left(s \in (\alpha, +\infty) \to s > \alpha \to \alpha - s < 0 \right)$

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = \overbrace{f(t) e^{-st}\Big|_0^{+\infty}}^{0 - f(0)\ *} - \int_0^{+\infty} f(t)(-s) e^{-st} dt$$

$* \ |f(t) e^{-st}| \leq |f(t)| e^{-st} \leq M e^{\alpha t} e^{-st} = M e^{(\alpha - s)t}$

$$= s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt - f(0) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0). \qquad \square$$

(II') Asumiendo que $f^{(k)}$ es de orden exponencial $\forall k = 1 \dots n$ se tiene

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f] - f(0) s^{n-1} - f'(0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\boxed{f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}$$

(III) **$\mathcal{L}$ transforma la operación "integrar" en "dividir por s"**;

$$\mathcal{L}\left[\int f\right](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s) \qquad \boxed{\int_0^t f \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} F(s)}$$

(IV) **$\mathcal{L}$ transforma la "convolución" en una "multiplicación"**

(La convolución de f y g es $f * g(t) = \int_0^t f(u) g(t-u)\, du$)

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) \qquad \boxed{f * g \xrightarrow{\mathcal{L}} F \cdot G}$$

Ejemplos:

- $f(t)=1 \longrightarrow F(s)=\int_0^{+\infty} 1\, e^{-st}\,dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$
- $f(t)=t,\ t\geq 0 \longrightarrow t=\int 1 \Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}\cdot \mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s^2}$ |Prop III)
- $f(t)=at^2+bt+c \longrightarrow F(s)= 2a\cdot\frac{1}{s^3} + b\cdot\frac{1}{s^2} + c\cdot\frac{1}{s}$ |prop III)
- $f(t)=t^n,\ t\geq 0 \longrightarrow F(s)= n!\,\frac{1}{s^{n+1}}$ $\left(t^n = n\int t^{n-1} = n(n-1)\int t^{n-2} \dots \right)$.
- $f(t)=e^{at},\ t\geq 0 \longrightarrow F(s)=\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)}\,dt = \frac{1}{s-a}$
- $f(t)=g(t)e^{at}$ $\quad F(s)=\int g(t)\,e^{-t(s-a)}\,dt = G(s-a)$

Para usar este mecanismo tenemos que poder antitransformar:

- **Teorema**: Sean $f, g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ de orden exponencial y continuas
  Si $\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[g]$ entonces $f=g$. ($\mathcal{L}$ es inyectiva en las f. continuas).

Esto es lo que permite una traducción, ir y volver.

Por ejemplo podemos afirmar que si $f(t)$ verifica $F(s)=\frac{1}{s-a} \Rightarrow f(t)=e^{at}$.

- **Ejemplo de como antitransformar:**

Si $F(s)=\frac{2}{s^3(s+1)} = \frac{2-2s+2s^2}{s^3} - \frac{2}{s+1} = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}$

Entonces $\mathcal{L}^{-1}[F] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s^2}\right] \dots$.

$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = t^2 - 2t + 2 - 2e^{-t}$ *

(Aquí se usa que $f(t)\cdot e^{-at} \rightarrow F(s+a)$)

- **Método de transf de Laplace para resolver ecuaciones:**

Consiste en transf. la ecuación dif en una ecuación algebraica. Resolver y una vez conseguida $F(s)$, antitransformar.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x'' + x' - 2x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos $\mathcal{L}$: $\left(s^2\mathcal{L}[x] - sx(0) - x'(0)\right) + \left(s\mathcal{L}[x] - x(0)\right) - 2\mathcal{L}[x] = 0$

Sustituyendo cond. iniciales y llamando $F(s)$ a $\mathcal{L}[x]$ tenemos

$$s^2F(s) - s + sF(s) - 1 - 2F(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad F(s)(s^2+s-2) = 1+s$$

$$F(s) = \frac{1+s}{s^2+s-2} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)} = \frac{s+2-1}{(s-1)(s+2)}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right).$$

$$= \frac{2}{3(s-1)} + \frac{1}{3(s+2)}$$

Si $F(s) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$

$\hookrightarrow \quad f(t) = x(t) = \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$ ✓

- **A tener en cuenta:**
  - $f(t) = \cos(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{s}{w^2+s^2}$
  - $f(t) = \operatorname{sen}(wt) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \frac{w}{w^2+s^2}$