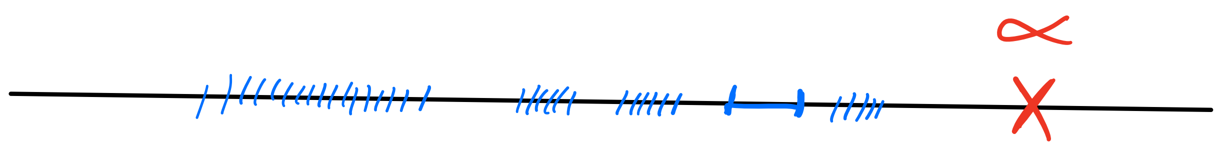
Axioma de completitud

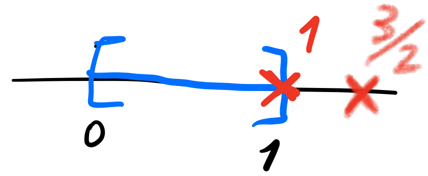
Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado ⓘ superiormente tiene supremo ⓘ.

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto.
Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una $\boxed{\text{cota superior}}$ (cota inferior) de A si:

$$x \leq \alpha \quad (x \geq \alpha) \quad \forall x \in A$$



Ejemplo: $A = [0,1]$



$3/2$ es una cota superior de A
1 es una cota superior de A
$-1/2$ es una cota inferior de A

El conjunto de todas las cotas superiores de A es $[1, +\infty)$

Ejemplo: $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$

Los naturales no tienen cotas superiores
Pero sí tiene cotas inferior, por ejemplo $-\sqrt{2}$ es una de ellas

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que $M \in \mathbb{R}$ es máximo (mínimo) de A si

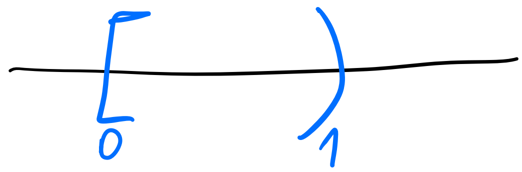
(mínimo)

- M es cota superior (cota inferior) de A
- $M \in A$

Ej: $A = [0,1]$; 1 es máximo de A
0 es mínimo de A

$\max(A) = 1$

Ej: $B = [0,1)$



B no tiene máximo, pero sí tiene cotas superiores, y su mínimo es 0

¡El máximo no tiene porqué existir!
¡Y el mínimo tampoco!!!

Def: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo (ínfimo) de A si:

* α es una cota superior (inferior) de A, y además

* $\alpha \leq \alpha'$ $\forall$ cota superior (inferior) α' de A
($\alpha \geq \alpha'$)

"El supremo (ínfimo) de un conjunto es la menor (la mayor) cota superior (inferiores) del conjunto"

"El supremo de un conjunto es la cota superior más chica del conjunto"

Ej: $A = [0,1]$, 1 es el máximo de A

1 es el supremo de A

$B = [0, 1)$ 1 es el supremo de B

pero B no tiene máximo

<u>Observación:</u> Si A tiene máximo M entonces M es el supremo de A

Si A tiene mínimo m entonces m es el ínfimo de A

Axioma de completitud

Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo

<u>Proposición:</u> Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo

Esto puede deducirse del axioma de completitud

<u>Ejemplo:</u> Sea $A = \left\{ \frac{m}{n} : 0 < m < n, \ m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Indicar la opción correcta:

a) A está acotado superiormente, tiene supremo pero no máximo

b) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo

c) A tiene supremo, que es máximo

d) A no está acotado superiormente, no tiene máximo pero tiene supremo

e) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

$$\left.\begin{array}{l} m < n, \\ 1/n \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} < n \cdot \frac{1}{n} = 1 \Longrightarrow \boxed{\frac{m}{n} < 1}$$