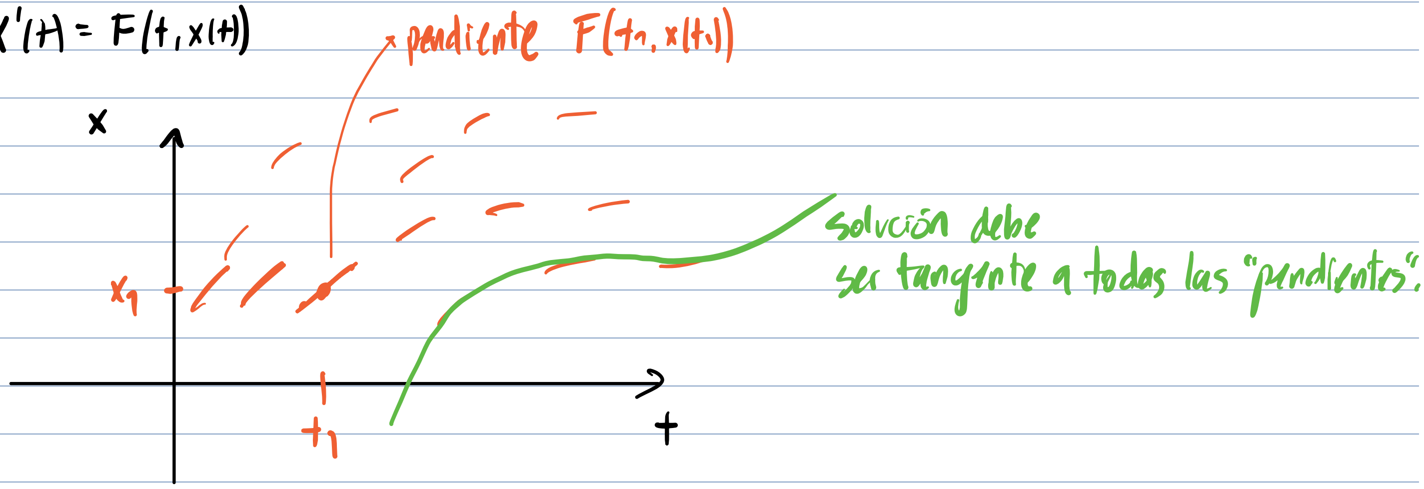
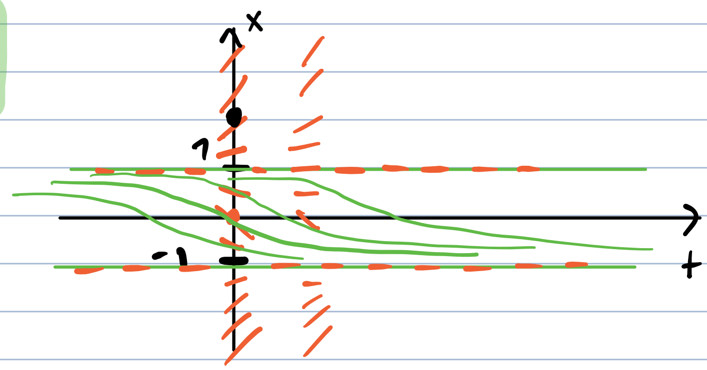
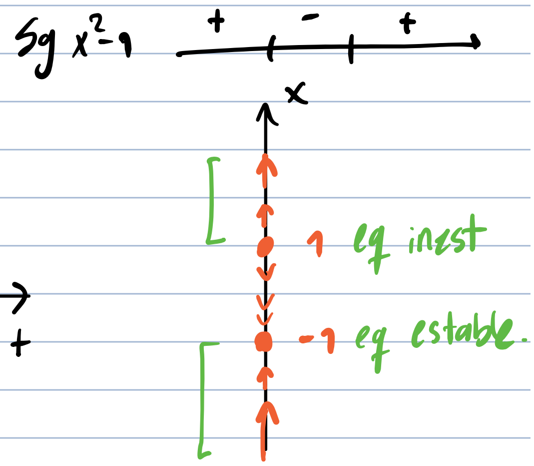
→ $x'(t) = F(t, x(t))$



$\boxed{\text{Ej 1 P1}}$ Estudio cualitativo (y resolver) ciertas ecuaciones autónomas.

c) $\boxed{\dot{x} = x^2 - 1}$





Ptos de equilibrio : $x' = 0$ sii $x^2 - 1 = 0$ sii $\boxed{x = \pm 1}$

Resolvemos : $x'(t) = (x^2(t) - 1) \cdot 1$

ec. de var sep:

$x' = A(x) \cdot B(t)$

$A(x) \neq 0 \rightarrow \dfrac{x'}{A(x)} = B(t)$

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t) - 1}\, dt = \int 1\, dt$$

C.V → $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = t + c$

$$\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)} \cdot \frac{1}{(x+1)}\, dx = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\log|x-1| - \log|x+1|\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \log\left|\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}\right|.$$

$$\log\left|\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}\right| = t+c \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} = e^{t}.e^{c}$$

$$\to \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = e^{2t}.e^{2c} \to \frac{x-1}{x+1} = e^{2t}.\underbrace{\left(\pm e^{2c}\right)}_{k\in\mathbb{R},\, k\neq 0}$$

$$x-1 = e^{2t}.k(x+1) = e^{2t}kx + e^{2t}.k$$

$$x(-e^{2t}.k+1) = e^{2t}.k+1 \to x(t) = \left[\frac{e^{2t}.k+1}{-e^{2t}.k+1}\right] = \frac{1+e^{2t}k}{1-e^{2t}k}.$$

- Si fijo $x(0)=x_0$, ¿cuál k corresponde a esa solución?

- $x(0) = \dfrac{1+k}{1-k} \to$
$$(1-k)x_0 = 1+k$$
$$x_0 - kx_0 = 1+k$$
$$x_0 - 1 = k(1+x_0) \to k = \left(\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

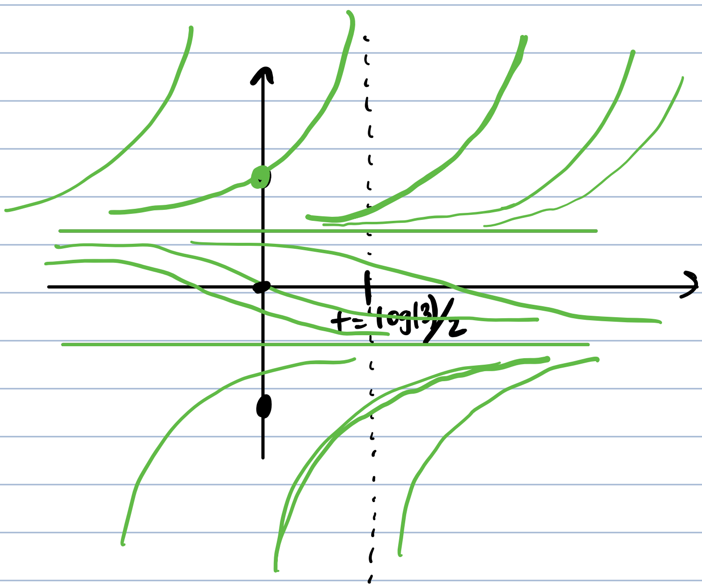
- Por ejemplo si $x(0)=2$, $k = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$ y la soluc corresp. es

$$\to x(t) = \frac{1+e^{2t}.(1/3)}{1-e^{2t}(1/3).}$$

$1-e^{2t}\frac{1}{3} = 0$ sii

$3 = e^{2t}$ sii $2t = \log(3)$

sii $t = \dfrac{\log(3)}{2} > 0$



- Si $x(0)=0$, $k=-1$

$\to$ y $x(t) = \dfrac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$

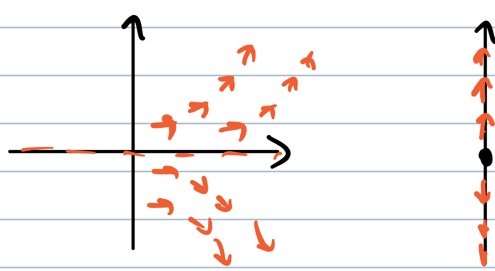


diagrama de fase es para autónomas ("proyección en variable espacial de campo de pendientes")

Recordamos lineales de primer y segundo orden (homog y no homog).

Primer orden (lineales) homog: $\boxed{x'+ax=0} \longrightarrow x(t)=e^{A(t)}.K$ con $A=\int a$.

Primer orden (lineales) no homog $\boxed{x'+ax=b} \longrightarrow x(t)=\underbrace{x_p(t)}_{e^{A(t)}\cdot K(t)}+\underbrace{x_H(t)}_{e^{A(t)}.K}$.

(método de variación de ctes para hallar K)

Orden dos (lineales) homog : $\boxed{x''+ax'+bx=0} \longrightarrow$ soluciones en función de raíces del pol. caract : $\lambda^2+a\lambda+b$

(a coef ctes: $a,b\in\mathbb{R}$)

tres posib.
- 2 raíces reales
- 1 raíz real doble
- 2 raíces comp. conjugadas

Orden dos (lineales) no homog : $\boxed{x''+ax'+bx=c} \longrightarrow x(t)=x_p(t)+x_H(t)$