Esperanza condicional.

$X$ discreta y sea $A$ evento tal que $P(A) > 0$

$$E(X|A) = \sum x_k P(X=x_k|A)$$

$$= \sum x_k \frac{P(X=x_k, A)}{P(A)}$$

$$= \sum x_k \frac{P(X1_A = x_k)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} E(X1_A)$$

$X$ e $Y$ V.A discretas

$$E(X|Y=y) = \sum_x x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ siempre que sea abs. convergente

Ejemplo: Tres monedas 1, 5 y 10 pesos

Sea $X$ la suma de las monedas que caen en C

1) cual es el valor esperado de $X$ dado que dos monedas caen en C.

2) sea $Y$ la suma de las monedas que caen en C y que además son de 1 y 5 pesos.

¿cuál es la esperanza de $X$ dado $Y$?

1) Espacio muestral

$\Omega = \{CCC, CCN, CNC, NCC, CNN, NCN, NNC, NNN\}$

Sea $B$ el evento dos monedas caen en C.

$B = \{CCN, CNC, NCC\}$

Quiero calcular $E(X|B)$

$X(CCN) = 1+5 = 6$, $X(CNC) = 1+10$, $X(NCC) = 5+10 = 15$

entonces $E(X|B) = \dfrac{1}{\frac{3}{8}} \left(6\frac{1}{8} + 11\frac{1}{8} + 15\frac{1}{8}\right)$

$$= \boxed{32/3}$$

2) $Y \in \{0,1,5,6\}$

$P(Y=0) = P(Y=1) = P(Y=5) = P(Y=6) = 1/4$

$E(X|Y=0) = 5 \qquad E(X|Y=5) = 10$

$E(X|Y=1) = 6 \qquad E(X|Y=6) = 11$

entonces $E(X|Y)(\omega) = \begin{cases} 5 & \text{si } Y(\omega)=0 \\ 6 & \text{si } Y(\omega)=1 \\ 10 & \text{si } Y(\omega)=5 \\ 11 & \text{si } Y(\omega)=6 \end{cases}$

<u>obs</u>: $E(E(X|Y)) = \frac{1}{4}(5+6+10+11) = 8 = E(X)$

$$E(E(X|Y)) = \sum_y E(X|Y=y)\, f_Y(y)$$
$$= \sum_y \sum_x x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)$$
$$= \sum_x x\, f_X(x) = E(X)$$

$$E(g(Y)\,E(X|Y)) = \sum_y g(y)\, E(X|Y=y)\, f_Y(y)$$
$$= \sum_y g(y) \sum_x x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\cancel{f_Y(y)}} \cancel{f_Y(y)}$$
$$= \sum_{y,x} g(y)\, x\, f_{X,Y}(x,y)$$
$$= E(g(Y)X)$$

Ejemplo: sea $(X,Y)$ vector aleatorio con prob conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{N(N+1)} & \text{si } x \leq y \quad x,y \in \{1,2,\dots,N\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

siendo $N$ natural positivo.

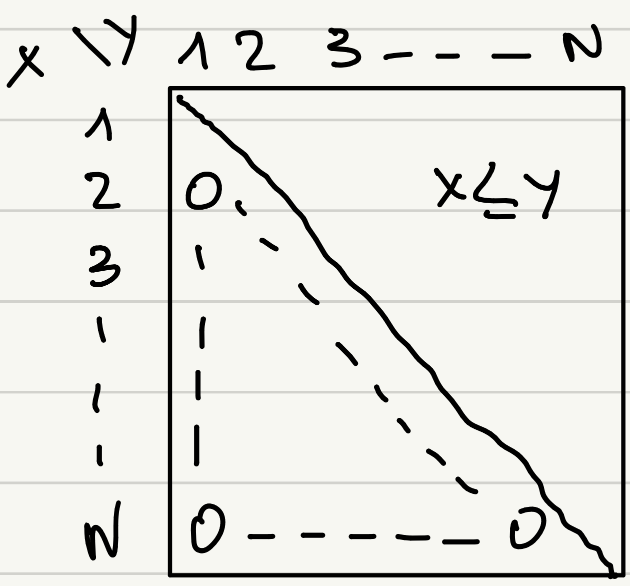
Calcular $E(X|Y)$ y $E(Y|X)$

- $$f_Y(y) = \sum_{x=1}^{y} f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{N(N+1)}\, y \qquad y = 1,2,\dots,N.$$

$$E(X|Y=y) = \sum_{x=1}^{N} x \, \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_{x=1}^{N} \frac{x}{y} = \frac{y+1}{2}$$

por lo tanto $\boxed{E(X|Y) = \dfrac{Y+1}{2}}$

- $$f_X(x) = \sum_{y=1}^{N} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=x+1}^{N} \frac{2}{N(N+1)} = \frac{2}{N(N+1)}(N+1-x)$$




$$E(Y|X=x) = \sum_{y=1}^{N} y \, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$
$$= \frac{1}{N+1-x} \sum_{y=1}^{N} y$$
$$= \frac{x+N}{2}$$

por lo tanto $\boxed{E(Y|X) = \dfrac{X+N}{2}}$